מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי״ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע״ד

מספר השאלון: **035806, 316**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה והסתברות	20X2	—	40		נק׳
פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה במישור	20X1	—	20		נק׳
פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	20X2	—	40		נק׳
סה״כ		—	100		נק׳

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2014

رقم النّموذج: **035806، 316**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج ثلاثة فصول.

الفصل الأوّل: الجبر والاحتمال	20X2	—	40	درجة
الفصل الثّاني: الهندسة وحساب المثلّثات في المستوى	20X1	—	20	درجة
الفصل الثّالث: حساب التّفاضل والتّكامل	20X2	—	40	درجة
المجموع		—	100	درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

خرجت شاحنة من المدينة A ، وبعد مرور 6 ساعات منذ خروجها وصلت إلى المدينة B .

بعد مرور وقت معيّن من خروج الشاحنة، خرجت سيّارة من المدينة A،

ووصلت إلى المدينة B قبل الشاحنة بساعتين.

التقت الشاحنة والسيّارة بعد مرور ساعة منذ خروج السيّارة.

كانت سرعتا الشاحنة والسيّارة ثابتتين.

جد بعد كم ساعة منذ خروج الشاحنة خرجت السيّارة (جد الحلَّيْن).

إجابة السؤال 1

نرمز: x — الوقت منذ خروج الشاحنة وحتّى لحظة خروج السيّارة

S — المسافة بين A وَ B

	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)	السرعة (كم/الساعة)
الشاحنة	6	S	$\frac{S}{6}$
السيّارة	$6-x-2$	S	$\frac{S}{4-x}$
حتّى اللقاء الشاحنة	$1+x$	$\frac{S}{6}\cdot(1+x)$	$\frac{S}{6}$
السيّارة	1	$\frac{S}{4-x}\cdot 1$	$\frac{S}{4-x}$

المسافة التي قطعتها الشاحنة حتّى اللقاء

تساوي المسافة التي قطعتها السيّارة حتّى اللقاء، لذلك:

$$\frac{S}{6}(1+x)=\frac{S}{4-x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$\Downarrow$$

x = ساعتان ، x = ساعة واحدة

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2

يوجد في متوالية حسابيّة $3n$ حدود.

مجموع n الحدود الأخيرة هو ضعف مجموع n الحدود التي قبلها.

أ. برهن أنّ مجموع n الحدود الأولى هو 0.

ب. معطى أيضًا أنّ مجموع الحدَّيْن الخامس والسابع هو 0.

مجموع كلّ حدود المتوالية هو 726.

جد فرق المتوالية.

إجابة السؤال 2

أ. مجموع n الحدود الأخيرة هو: $S_{n\text{ الأخيرة}} = \frac{n}{2}(2a_{2n+1} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (5n-1)d)$

مجموع n الحدود التي قبلها هو: $S_{n\text{ التي قبلها}} = \frac{n}{2}(2a_{n+1} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$

حسب المعطى:

$$S_{n\text{ الأخيرة}} = 2 \cdot S_{n\text{ التي قبلها}}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n}{2}(2a_1 + (5n-1)d) = 2 \cdot \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$
$$\Downarrow$$
$$2a_1 = -d(n-1)$$

مجموع n الحدود الأولى هو: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

نعوّض $2a_1 = -d(n-1)$ في S_n،

وينتج: $S_n = \frac{n}{2}(-d(n-1) + d(n-1)) = 0$

ب. حسب المعطى: $a_5 + a_7 = 0$

$$\Downarrow$$

I. $2a_1 + 10d = 0$

وجدنا في البند "أ" أنّ: II. $2a_1 = -d(n-1)$

$d \neq 0$، لذلك من I وَ II ينتج: $n = 11$

$$\Downarrow$$

عدد الحدود في المتوالية هو: $3n = 33$

نعوّض في مجموع الحدود $3n = 33$

وَ $2a_1 = -10d$ وينتج: $726 = \frac{33}{2}[-10d + d(33-1)]$

$$\Downarrow$$
$$d = 2$$

/يتبع في صفحة 4/

السؤال 3

يلعب داني مع والده برمي الكرة إلى السلّة. تشمل كلّ لعبة جولتَيْن.

يحصل الفائز في الجولة على نقطة واحدة. إذا انتهت الجولة بالتعادل، يحصل كلّ واحد على نصف نقطة.

معطى أنّ: الاحتمال بأن يفوز داني في الجولة هو 0.1 ،

الاحتمال بأن يفوز والده في الجولة هو 0.2 ،

الاحتمال بأن تنتهي الجولة بالتعادل هو 0.7 .

الجولتان لا تتعلّق إحداهما بالأخرى.

أ. ما هو الاحتمال بأن يجمّع والد داني في الجولتين أكثر من نقطة واحدة؟

ب. ما هو الاحتمال بأن يجمّع داني في الجولتين نقطة واحدة على الأقلّ ؟

جـ. معلوم أنّ داني جمّع في الجولتين نقطة واحدة على الأقلّ.
ما هو الاحتمال بأن تكون إحدى الجولتين قد انتهت بالتعادل والأخرى بفوز داني؟

د. يلعب داني ووالده اللعبة الموصوفة في مقدّمة السؤال 4 مرّات. (تشمل كلّ لعبة جولتَيْن.)
ما هو الاحتمال بأن يجمّع داني على الأقلّ نقطة واحدة مرّتين بالضبط؟

إجابة السؤال 3

أ. الاحتمال بأن يجمّع والد داني أكثر من نقطة واحدة هو:

$$P\left(\begin{matrix}\text{الوالد}\\ \text{أكثر من } 1\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{الوالد}\\ \text{يفوز}\end{matrix}, \text{تعادل}\right) + P\left(\text{تعادل}, \begin{matrix}\text{الوالد}\\ \text{يفوز}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{الوالد}\\ \text{يفوز}\end{matrix}, \begin{matrix}\text{الوالد}\\ \text{يفوز}\end{matrix}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{الوالد}\\ \text{أكثر من } 1\end{matrix}\right) = 0.2\times0.7 + 0.7\times0.2 + 0.2\times0.2 = 0.32$$

ب. الاحتمال بأن يجمّع داني نقطة واحدة على الأقلّ هو:

$$P\left(\begin{matrix}\text{داني على}\\ \text{الأقلّ } 1\end{matrix}\right) = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{داني}\\ \text{يخسر}\end{matrix}, \begin{matrix}\text{داني}\\ \text{يخسر}\end{matrix}\right) - P\left(\text{تعادل}, \begin{matrix}\text{داني}\\ \text{يخسر}\end{matrix}\right) - P\left(\begin{matrix}\text{داني}\\ \text{يخسر}\end{matrix}, \text{تعادل}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{داني على}\\ \text{الأقلّ } 1\end{matrix}\right) = 1 - 0.2\times0.2 - 0.7\times0.2 - 0.2\times0.7 = 0.68$$

جـ. الاحتمال بأن تكون إحدى الجولتين قد انتهت بالتعادل والأخرى بفوز داني، إذا عُلم أنّ داني جمّع نقطة واحدة على الأقلّ، هو الاحتمال المشروط:

$$P\left(\begin{matrix}\text{جولة تعادل والأخرى}\\ \text{داني يفوز}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{داني على}\\ \text{الأقلّ } 1\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{جولة تعادل والأخرى}\\ \text{داني يفوز}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{داني على}\\ \text{الأقلّ } 1\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{داني على}\\ \text{الأقلّ } 1\end{matrix}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{جولة تعادل والأخرى}\\ \text{داني يفوز}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{داني على}\\ \text{الأقلّ } 1\end{matrix}\right) = \frac{0.7\times0.1 + 0.1\times0.7}{0.68} = \frac{7}{34}$$

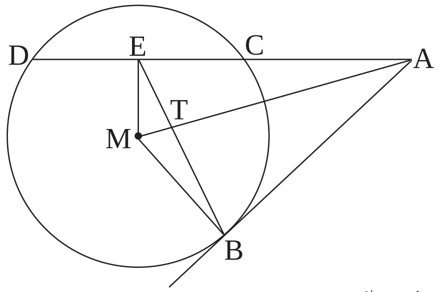
د. وجدنا أنّ الاحتمال بأن يجمّع داني نقطة واحدة على الأقلّ في اللعبة هو 0.68 ، لذلك الاحتمال المطلوب هو:

$$P = P_4(2) = \frac{4!}{2!2!}0.68^2\times0.32^2 = 0.284$$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 4

من النقطة A يخرج مستقيم يمسّ دائرة في النقطة B ،



ويخرج مستقيم آخر يقطع الدائرة

في النقطتين C وَ D .

النقطة E هي منتصف الوتر DC .

النقطة M هي مركز الدائرة (انظر الرسم) .

أ . برهن أنّ الشكل الرباعيّ AEMB قابل للحصر في دائرة .

ب . قطرا الشكل الرباعيّ AEMB ، القابل للحصر في دائرة، يلتقيان في النقطة T .

معطى أنّ النقطة T هي ملتقى المستقيمات المتوسّطة في المثلّث BDC .

برهن أنّ $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

جـ . معطى أنّ : $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ سم ، $MT = 1$ سم .

جد نصف قطر الدائرة التي تحصر الشكل الرباعيّ AEMB .

إجابة السؤال 4

أ . $\sphericalangle MEA = 90^o$ القطعة من مركز الدائرة التي تنصّف الوتر تعامد الوتر

$\sphericalangle MBA = 90^o$ المماسّ للدائرة يعامد نصف القطر

من هنا : $\sphericalangle MEA + \sphericalangle MBA = 180^o$

$\Downarrow$

الشكل الرباعيّ AEMB قابل للحصر في دائرة مجموع الزاويتين المتقابلتين يساوي 180^o

ب . $TB = 2TE$ نقطة التقاء المستقيمات المتوسّطة في المثلّث تقسم المستقيم المتوسّط بنسبة 2:1

$TB \cdot TE = MT \cdot TA$ الوتران يتقاطعان، لذلك حاصل ضرب قطعتَي أحد الوترين، يساوي حاصل ضرب قطعتَي الوتر الآخر

نعوّض $TE = \frac{TB}{2}$ في حاصل ضرب الوترين، وينتج : $TB \cdot \frac{TB}{2} = MT \cdot TA$

$\Downarrow$

$TB^2 = 2MT \cdot TA$

/يتبع في صفحة 6/

تكملة الإجابة للسؤال رقم 4.

جـ. وجدنا في البند "ب" أنّ: $TB = 2TE$

$\Downarrow$

$TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ، لذلك: $TB^2 = 10$

نعوّض المعطيات في المعادلة التي برهنّاها
في البند "ب"، وينتج: $10 = 2 \cdot 1 \cdot TA$

$\Downarrow$

$TA = 5$

$AM = MT + TA = 1 + 5 = 6$

AM قطر في الدائرة لأنّ الزاوية المحيطيّة التي تستند على AM هي 90^o

$\Downarrow$

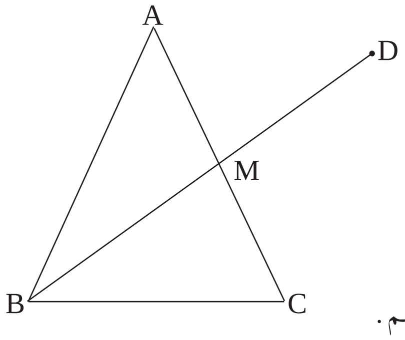
نصف القطر $= \frac{AM}{2}$

$\Downarrow$

نصف القطر = 3 سم

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 5



في المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$،

BM هو مستقيم متوسّط للساق (انظر الرسم) .

معطى أنّ : $\sphericalangle BAC = 50^o$.

أ. احسب مقدار الزاوية المنفرجة AMB .

يمدّون BM حتّى النقطة D .

معطى أيضًا أنّ :

نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABC هو 10 سم .

نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABD هو 14 سم .

ب. احسب زوايا المثلّث AMD .

إجابة السؤال 5

أ. نرمز: $AB = AC = b \;,\; \sphericalangle AMB = \alpha$

$\sphericalangle BAC = 50^o$ ، لذلك: $\sphericalangle ABM = 180^o - 50^o - \alpha = 130^o - \alpha$

BM مستقيم متوسّط، لذلك: $AM = \frac{1}{2}b$

حسب نظريّة السينوس في المثلّث ABM يتحقّق: $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}b}{\sin(130^o - \alpha)}$

$$\Downarrow$$

$$\sin\alpha = 2(\sin 130^o \cos\alpha - \sin\alpha \cos 130^o)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin 130^o}{1 + 2\cos 130^o}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{tg}\,\alpha = -\,5.36$$

$$\Downarrow$$

$90^o < \alpha < 180^o$ ، لذلك: $\alpha = 100.56^o$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة الإجابة للسؤال رقم 5.

ب. وجدنا في البند "أ" أنّ: $\sphericalangle ABM = 130^o - \alpha$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABM = 29.44^o$

حسب نظريّة السينوس
في المثلّث ABD يتحقّق: $\frac{b}{\sin \sphericalangle ADB} = 2 \times 14$ I.

حسب نظريّة السينوس
في المثلّث ABC يتحقّق: $\frac{b}{\sin 65^o} = 2 \cdot 10$ II.

من I وَ II ينتج: $\sin \sphericalangle ADB = \frac{20 \sin 65^o}{28}$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ADB = 40.34^o$

$\sphericalangle AMD = 180^o - \alpha = 79.44^o$

$\sphericalangle MAD = \alpha - \sphericalangle ADB = 60.22^o$ الزاوية الخارجيّة للمثلّث هي مجموع الزاويتين في المثلّث غير المجاورتين لها

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 6

معطاة الدالّتان: $f(x) = 2\sin^2 x$ ، $g(x) = \sin(2x)$ ، في المجال $0 \le x \le \pi$.

أ. في المجال المعطى، جد:

(1) الإحداثيّات x لنقاط التقاطع بين الرسمين البيانيّين للدالّتين.

(2) نقاط تقاطع كلّ واحدة من الدالّتين مع المحور x .

ب. (1) معطاة الدالّة $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

بيّن أنّ $h'(x) = f(x)$.

(2) في المجال $0 \le x \le \pi$ ، جد المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيّين للدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$.

إجابة السؤال 6

أ. (1) في نقطة تقاطُع الدالّتين يتحقّق:

$$2\sin^2 x = \sin(2x)$$
$$\Downarrow$$
$$2\sin^2 x = 2\sin x \cos x$$
$$\Downarrow$$
$$2\sin x\,(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad , \qquad \sin x - \cos x = 0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\qquad\qquad \operatorname{tg} x = 1$$
$$\qquad\qquad \Downarrow$$

الإحداثيّات x لنقاط تقاطُع الرسمين البيانيّين: $x = 0 \;,\; x = \pi \qquad x = \frac{\pi}{4}$

(2)
$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \pi k \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \pi$$
$$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x = \pi k \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \frac{\pi}{2} \;,\; x = \pi$$

نقطتا تقاطُع $f(x)$ مع المحورين: $(0, 0) \;,\; (\pi, 0)$

نقاط تقاطُع $g(x)$ مع المحورين: $(0, 0) \;,\; (\frac{\pi}{2}, 0) \;,\; (\pi, 0)$

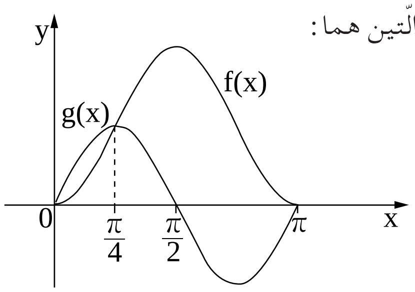
/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة الإجابة للسؤال رقم 6.

ب. (1) $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2x$$
$$\Downarrow$$
$$h'(x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$\Downarrow$$
$$h'(x) = 2\sin^2 x$$
$$\Downarrow$$
$$h'(x) = f(x)$$

(2) $f(x) \geq 0$, $g(x)$ هي دالّة سينوس
وحسب نقاط تقاطُع الدالّتين،
ينتج أنّ الرسمين البيانيّين للدالّتين هما :



لذلك المساحة المطلوبة هي :

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - g(x))\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) - h'(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (h'(x) - g(x))\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$S = [-\frac{1}{2}\cos(2x) - h(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [h(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$\Downarrow$$
$$S = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - h\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\frac{1}{2}\cos 0 - h(0)) + h(\pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi) - \left(h\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$S = 2 + \frac{\pi}{2}$$

/يتبع في صفحة 11/

السؤال 7

معطاة الدالّة $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a هو بارامتر أكبر من 0.

أ. (1) ما هو مجال تعريف الدالّة $f(x)$ ؟

(2) بيّن أنّه لا توجد نقاط التواء للدالّة $f(x)$.

ب. (1) ما هو مجال تعريف دالّة المشتقّة $f'(x)$ ؟

(2) عبّر بدلالة a عن خطوط التقارب الأفقيّة لدالّة المشتقّة $f'(x)$.

(3) جد مجالات تصاعد وتنازل دالّة المشتقّة $f'(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

(4) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا لدالّة المشتقّة $f'(x)$.

جـ. المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x
والمستقيم $x=-4$ ، تساوي 2.
بدون حساب قيمة a، احسب القيمة العدديّة لِـ $f(-4)$
والقيمة العدديّة لِـ $f(4)$.

إجابة السؤال 7

أ. (1)

$$a>0 \quad , \quad x^2 \geqslant 0 \quad , \quad 9>0$$

$$\Downarrow$$

لكلّ x $\quad ax^2+9>0$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ معرَّفة لكلّ x

(2)

$$f'(x)=\frac{2ax}{2\sqrt{ax^2+9}}=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{a\sqrt{ax^2+9}-\frac{ax\cdot 2ax}{2\sqrt{ax^2+9}}}{ax^2+9}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{9a}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}$$

$$\Downarrow$$

بما أنّ $a>0$ وَ $ax^2+9>0$ ، ينتج: $\quad f''(x)>0$ لكلّ x

$$\Downarrow$$

لا توجد نقاط التواء لِـ $f(x)$

/يتبع في صفحة 12/

تكملة الإجابة للسؤال رقم 7 .

ب. (1) $ax^2+9>0$ لكلّ x

$\Downarrow$

$f'(x)$ معرَّفة لكلّ x

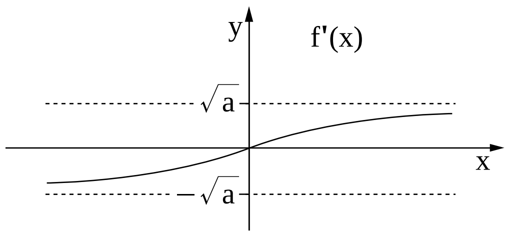
(2) خطّا التقارب لـِ $f'(x)$: $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$

(3) وجدنا في البند "أ (2)" أنّ: $f''(x)>0$ لكلّ x

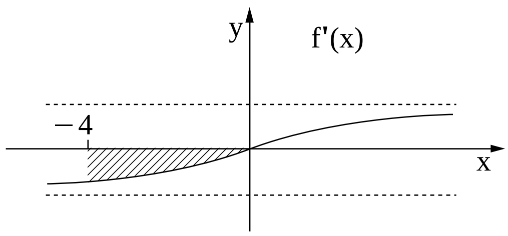
$\Downarrow$

$f'(x)$ تصاعديّة لكلّ x

(4) $f'(0)=0$ ، لذلك:



جـ. المساحة التي تساوي 2 هي تحت المحور x كما هو موصوف في الرسم:



$\Downarrow$

$$2=-\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx=-\,[f(x)]_{-4}^{0}$$

$\Downarrow$

$$2=-f(0)+f(-4)$$

$\Downarrow$

$f(0)=3$ ، لذلك: $2=-3+f(-4)$

$\Downarrow$

$$f(-4)=5$$

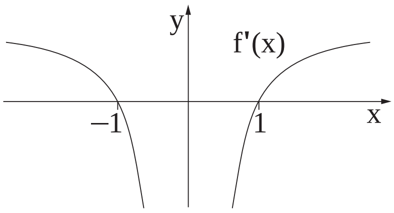
$\Downarrow$

بما أنّ $f(x)=f(-x)$ ، ينتج: $f(4)=5$

/ يتبع في صفحة 13 /

السؤال 8

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$.



خطّ التقارب الوحيد للدالّة $f(x)$ هو $x = 0$.

معطى أنّه يوجد حلّ واحد فقط للمعادلة $f(x) = 2$

وحلّ واحد فقط للمعادلة $f(x) = -2$.

أ. حسب معطيات السؤال فقط،

ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$. علّل.

ب. معطى أيضًا أنّ دالّة المشتقّة $f'(x)$ هي: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$ ،

a وَ b هما بارامتران لا يساويان 0.

جد الدالّة $f(x)$ (بدون بارامترات).

إجابة السؤال 8

أ. حسب الرسم البيانيّ:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	↗		↘	↘		↗

$\Downarrow$

لِـ$f(x)$ نهاية عظمى في $x = -1$ ونهاية صغرى في $x = 1$

$x = 0$ هو خطّ التقارب الوحيد لـ $f(x)$

ولا توجد خطوط تقارب أفقيّة، والمستقيمان $y = \pm 2$

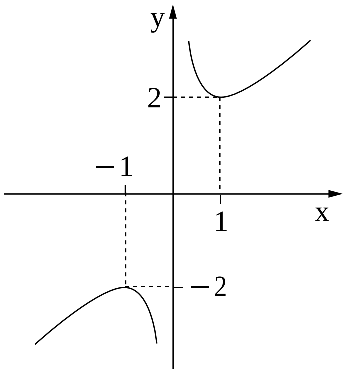
يقطعان $f(x)$ في نقطة واحدة، لذلك:

$\Downarrow$

$y = 2$ يمسّ $f(x)$ في نقطة النهاية الصغرى

$y = -2$ يمسّ $f(x)$ في نقطة النهاية العظمى

من هنا الرسم البيانيّ للدالّة هو:



/يتبع في صفحة 14/

تكملة الإجابة للسؤال رقم 8.

ب. حسب الرسم البيانيّ: $f'(1) = 0$

نعوّض النقطة $(1 , 0)$ في $f'(x)$ وينتج: $f'(1) = \frac{a-b}{a} = 0$

$$\Downarrow$$

$$a = b$$

نعوّض $a = b$ في $f'(x)$

وينتج: $f'(x) = \frac{ax^2 - a}{ax^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x} + C$$

وجدنا في البند "أ" أنّ إحداثيّات

نقطة النهاية الصغرى هي $(1, 2)$.

نعوّض $(1, 2)$ في $f(x)$ وينتج: $2 = 1 + 1 + C$

$$\Downarrow$$

$$C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$