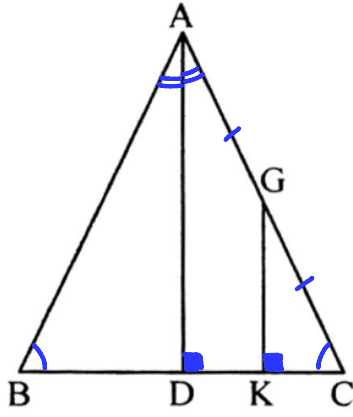


جاني يكوئيل- صف تاسع - القطعة المتوسطة - سؤال ١٥ ص ٦٢٨



$\triangle ABC$ هو مثلث متساوي الساقين ($AB = AC$).

AD هو منتصف الزاوية $\angle BAC$ ،

النقطة G هي وسط الضلع AC .

$GK \perp DC$ (أنظروا الرسم).

برهنوا أن: $KC = \frac{BC}{4}$.

طوب برهانه: $KC = \frac{BC}{4}$

معطى: $\triangle ABC$ متساوي الساقين ($AB = AC$)
 $AG = GC$, $\angle BAD = \angle DAC$
 $GK \perp DC$

شرح

إدعاء

$\triangle ABC$ متساوي الساقين ، AD منتصف الزاوية A .
 بالمثلثات المتساوي الساقين ، الارتفاع للقاعدة ، المتوسط للقاعدة
 ومنتصف زاوية الرأس متطابقة .

(1) $AD \perp BC$

$90^\circ = \angle ADC = \angle GKC$ زوايا متناظرة متساوية (معطى + ادعاء 1)

(2) $GK \parallel AD$

GK قطعة بالمثلث $\triangle ADC$ تنصف ضلع ($AG = GC$)
 وتوازي ضلع آخر ، هي قطعة متوسطة

(3) GK قطعة متوسطة بالمثلث $\triangle ADC$

القطعة المتوسطة (ادعاء 3) تنصف ضلعين بالمثلث

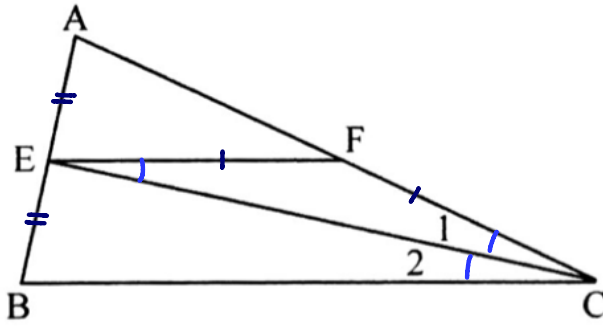
(4) $DK = KC$

ادعاء 1 + 3 + 4

(5) $KC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{4} BC$

وهو المطلوب

جاني يكوئيل - صف تاسع - القطعة المتوسطة - سؤال ٢٨ ص ٦٣١



في المثلث ABC ، النقطة E

هي منتصف الضلع AB .

معطى: $EF = FC$ ، $\angle C_1 = \angle C_2$

(أنظروا الرسم).

(أ) برهنوا أن: $AF = EF$

(ب) برهنوا أن: $CA = CB$

(ج) برهنوا أن: $\triangle AEC$ هو مثلث قائم الزاوية.

أ. $AF = EF$ مطلوب برهنه
ب. $CA = CB$
ج. $\triangle AEC$ مثلث قائم الزاوية

معطى: $\angle C_1 = \angle C_2$, $AE = EB$
 $EF = FC$

شرح

إدعاء

$\triangle EFC$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية

أ. (1) $\angle FEC = \angle C_1$

من ادعاء 1 + معطى $\angle FEC = \angle C_2$
زوايا متبادلة متساوية

(2) $EF \parallel BC$

نقطع بالمثلث التي تنصف ضلع $AE = EB$ وتوازي ضلع ثاب
هي قطعة متوسطة

(3) EF قطعة متوسطة بالمثلث $\triangle ABC$

حسب ادعاء 3 - القطعة المتوسطة تنصف ضلعين بالمثلث.
توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه

(4) $AF = EF$

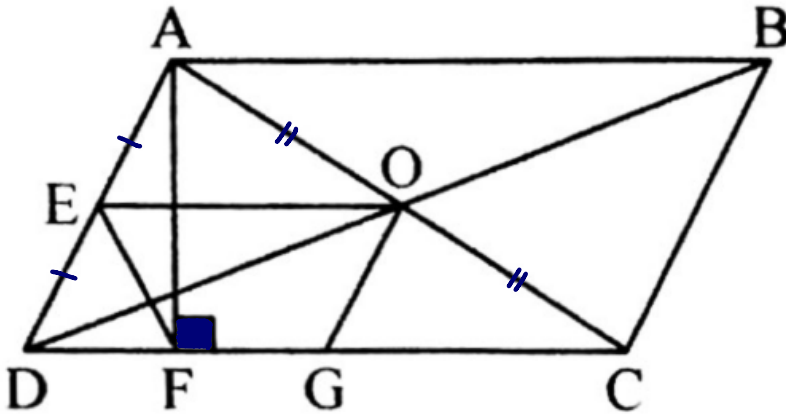
وهو المطلوب

$\triangle CAB$ مثلث به متوسط لضع وهو ايضاً منصف الزاوية
التي تقابل نفس الضلع، اذاً المثلث متساوي الساقين
والمحوسب ايضاً يعامد القاعدة.

ب. (5) $\triangle CAB$ متساوي الساقين
ج. $(CA = CB)$
 $\triangle AEC$ مثلث قائم

وهو المطلوب

جاني يكوئيل - صف تاسع - القطعة المتوسطة - سؤال ٢٩ ص ٦٣٢



الشكل الرباعي ABCD هو متوازي أضلاع.

معطى: $AE = ED$ ، $DG = GC$ ،

$AF \perp DC$ (أنظروا الرسم).

(أ) برهنوا أن: EO هو قطعة متوسطة في $\triangle ADC$.

(ب) برهنوا أن: الشكل الرباعي EOGF هو شبه منحرف.

(ج) برهنوا أن: الشكل الرباعي EOGF هو شبه منحرف متساوي الساقين.

أ. EO قطعة متوسطة بالمثلث ADC
ب. EOGF شبه منحرف
ج. EOGF شبه منحرف متساوي الساقين

معطى: ABCD متوازي اضلاع ($AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$)
 $AF \perp DC$, $DG = GC$, $AE = ED$

شرح

إدعاء

ABCD متوازي الاضلاع لذلك اضاراه تنلق بظنها البعان

أ. (1) $AO = OC$, $DO = BO$

قطعة بالمثلث التي تنلق ضلعين بالمثلث
($AO = OC$ ادعاء 1 + $AE = ED$ معطى) هي قطعة متوسطة

(2) EO قطعة متوسطة بالمثلث ADC

وهو المطلوب

القطعة المتوسطة EO بالمثلث ADC، تنلق ضلعين بالمثلث، توازي اضلع الثالث وتساوي نصفه

ب. (3) $EO = \frac{1}{2} DC$, $EO = DG = GC$
 $EO \parallel DC$

شكل رباعي به زوج اضلاع متقابلة متوازية هو شبه منحرف

(4) EOGF شبه منحرف

وهو المطلوب

$\triangle ADF$ مثلث قائم. $AE = ED$
المتوسطة للوتر يساوي نصفه

ج. (5) $EF = AE = ED$

شكل رباعي به زوج اضلاع متقابلة متوازية ومتساوية هو متوازي اضلاع (ادعاء 3)

(6) EOGD متوازي الاضلاع

بالتوازي اضلاع (ادعاء 6) كل زوج اضلاع متقابلة متساوية

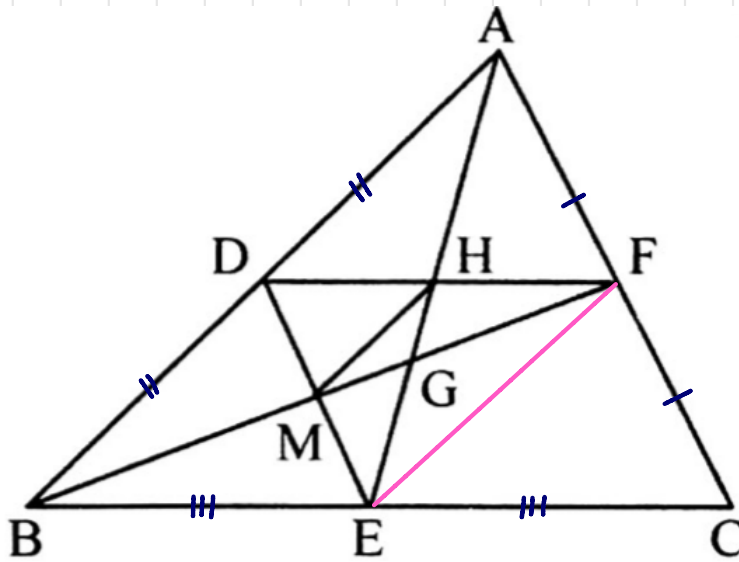
(7) $ED = OG$

شبه منحرف (ادعاء 7) ساقيه متساوية $EF = OG$
(ادعاء 7+5) هو شبه منحرف متساوي الساقين.

(8) EOGF شبه منحرف متساوي الساقين

وهو المطلوب

جاني يكوئيل - صف تاسع - القطعة المتوسطة - سؤال ٣٠ ص ٦٣٢



النقاط D ، E و F هي منتصفات أضلاع $\triangle ABC$

BF و DE يلتقيان في النقطة M .

DF و AE يلتقيان في النقطة H (أنظروا الرسم).

(أ) برهنوا أن: MH هو قطعة متوسطة

في $\triangle ADE$.

(ب) برهنوا أن: $MH = \frac{AB}{4}$.

أكتبوا بدايةً "مُخطّط برهان" .

معطى: $BE = EC$, $AD = DB$, $AF = FC$

طالوب برهانه: أ. MH قطعة متوسطة بالمثلث $\triangle ADE$

ب. $MH = \frac{AB}{4}$

بناء مساعد: نجد EF

شرح

إدعاء

القطعة التي تنقّف ضلعين بالمثلث هي قطعة متوسطة (من المحيطيات)

القطعة المتوسطة بالمثلث تنقّف ضلعين , توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه

شكل رباعي به كل زوج أضلاع متقابلته متوازية هو متوازي الأضلاع

بالموازي الأضلاع الاقطار تنقّف بعلمها البطان (ادعاء 3)

قطعة بالمثلث التي تنقّف ضلعين هي قطعة متوسطة (ادعاء 4) $EH = HA$, $DN = NE$

وهو المطلوب

القطعة المتوسطة تنقّف ضلعين , توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه + ادعاء 2

وهو المطلوب

أ. (1) DE, EF, DF قطع متوسطة بالمثلث $\triangle ABC$

(2) $EF = \frac{1}{2} AB$, $DF = \frac{1}{2} BC$, $DE = \frac{1}{2} AC$
 $EF \parallel AB$, $DF \parallel BC$, $DE \parallel AC$

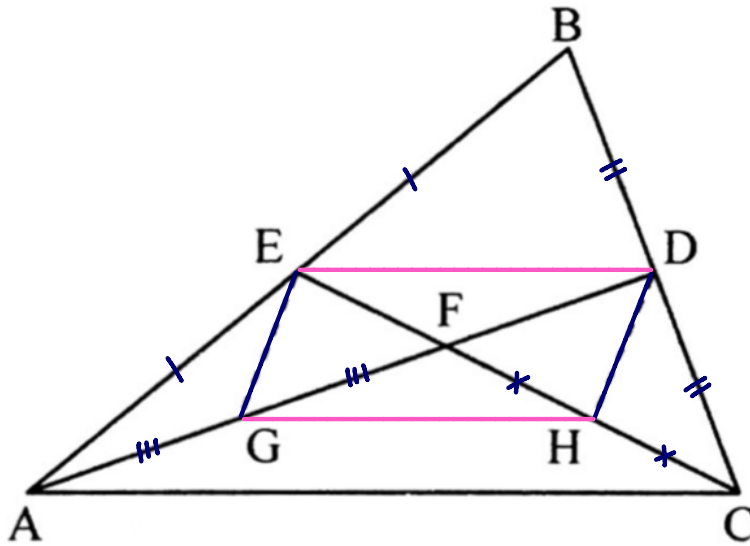
(3) $DECF$, $DFEB$, $DAFE$ متوازي الأضلاع

(4) $BH = HF$, $DN = NE$
 $DH = HF$, $AH = HE$

(5) MH قطعة متوسطة بالمثلث $\triangle ADE$

ب. (6) $MH = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{4} AB$

جاني يكوئيل - صف تاسع - القطعة المتوسطة - سؤال ٣١ ص ٦٣٢



في $\triangle ABC$ ، النقطتان D و E هما منتصف الضلعين BC و AB بالتناظر.

AD و CE يلتقيان في النقطة F .

النقطة H تقع على CE

والنقطة G تقع على AD

بحيث: $FG = GA$ ، $FH = HC$

(أنظروا الرسم).

برهنوا أن: $DH = EG$.

إرشاد: إحدى إمكانيات برهنة المطلوب

هي بأن نضيف إلى الرسم BF .

بناء مساعد: نجد ED و GH

مطلوب برهانه: $DH = EG$

مطلوب: $BD = DC$, $AE = EB$
 $FG = GA$, $FH = HC$

شرح

إدعاء

مطلوب بحثت التي تنلق ضلعين (من المعطيات) هي قطعة متوسطة .

(1) قطعة متوسطة بالمثلث DABC
GH قطعة متوسطة بالمثلث DAFC

القطعة المتوسطة بالمثلث تنلق ضلعين , توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه .

(2) $ED \parallel AC$, $ED = \frac{1}{2} AC$
 $GH \parallel AC$, $GH = \frac{1}{2} AC$

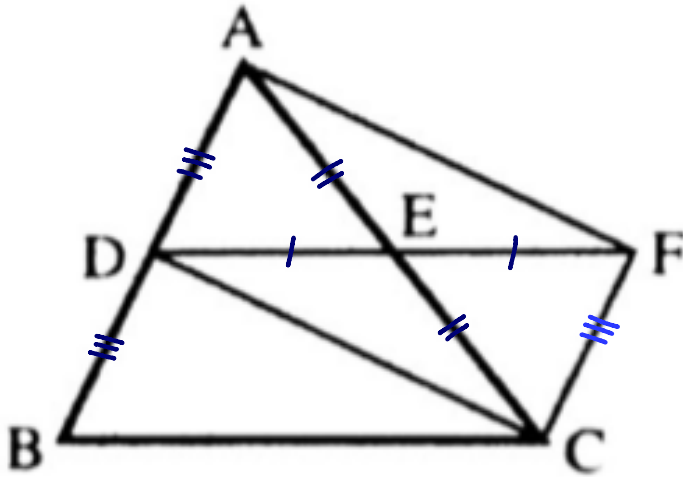
شكل راي به زوج اضلاع متقابلة متوازية ومتساوية هو متوازي الاضلاع

(3) EDHG متوازي الاضلاع

بالموازي اضلاع (ادعاء 3) كل زوج اضلاع متقابلة متساوية

(4) $DH = EG$

وهو المطلوب



DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
הנקודה F נמצאת על המשך DE
כך שמתקיים $EF = DE$.
הוכח:

א. המרובע ADCF הוא מקבילית.
ב. המרובע DBCF הוא מקבילית.

מטל: DE ממצע מושתת באלכסון DABC
($AD=BD, AE=EC$) $EF=DE$

מטלות בפרק: א. ADCF מוואי אצל
ב. DBCF מוואי אצל

שח

אדעא

שכל ראי אחרת תנפ בענה הבטן לו מוואי אצל
 $DE=EF, AE=EC$

והו אצל

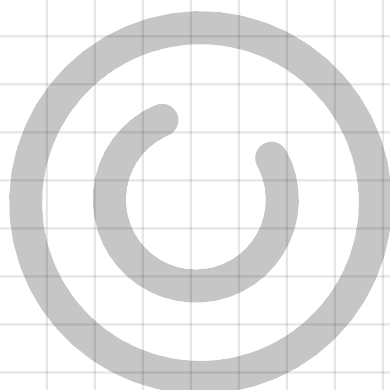
באלוואי אצל AFCD, כל זוג אצל מואל מואל
ומואל

מא אדעא 2 + מואל
שכל ראי לו זוג אצל מואל ומואל
מוואי אצל
והו אצל

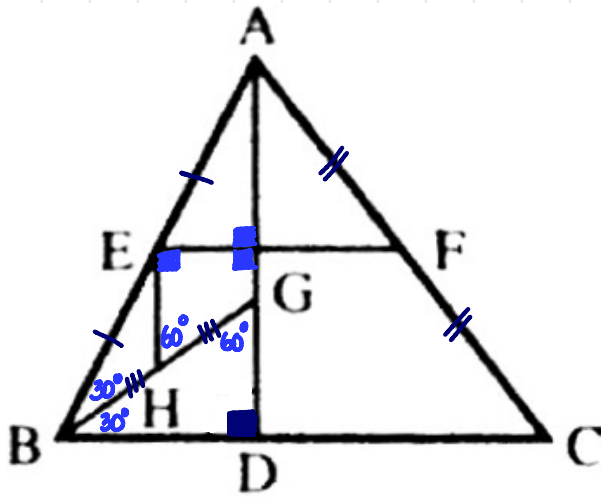
א. (1) ADCF מוואי אצל

ב. (2) $CF=DA, CF \parallel DA$

(3) DBCF מוואי אצל



ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 14 עמ' 155



- AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.
- EF הוא קטע אמצעים. G נקודה כלשהי על הגובה. הנקודה H היא אמצע BG.
- א. הוכח: $\angle HEF = 90^\circ$.
- ב. נתון: GB חוצה את זווית B, $\angle ABC = 60^\circ$. הוכח: $BH = EH$.

מטל: $AD \perp BC$
 EF קטע ממוצע באלכסון $\triangle ABC$
 $(AE=EB, AF=FC)$
 $BH=HG$

המטלות: א. $\angle HEF = 90^\circ$: הוכח ב. $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ABG = \angle GBD$: הוכח $BH = EH$

נדרש

אמצעים

EF קטע ממוצע באלכסון $\triangle ABC$, אי ניגף זוויות, יוצרי הצלע השלישית ויסיקו זהה.

1. (1) $EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2} BC$

זווית מתחלפת מתחלפת מן התואר $EF \parallel BC$

(2) $\angle AGE = \angle ADB = 90^\circ$

EH קטע באלכסון $\triangle ABG$ הדי יוטט זוויות

(3) EH קטע ממוצע באלכסון $\triangle ABG$

הקטע הממוצע (אמצעים 3) ניגף זוויות, יוצרי הצלע השלישית ויסיקו זהה

(4) $EH \parallel AG, EH = \frac{1}{2} AG$

$EH \parallel AG$

$\angle HEF = \angle EGA = 90^\circ$ זווית מתחלפת מתחלפת מן התואר

(5) $\angle HEF = 90^\circ$

והם המטלות

מן המעגלים

ד. (6) $\angle ABG = \angle GBD = 30^\circ$

מסכום זווית אלכסון $\triangle BGD$ 180°

(7) $\angle BGD = 60^\circ$

זווית מתחלפת מתחלפת מן התואר $EH \parallel AD$

(8) $\angle EHG = \angle BGD = 60^\circ$

המחלל ל- 180°

(9) $\angle EHB = 120^\circ$

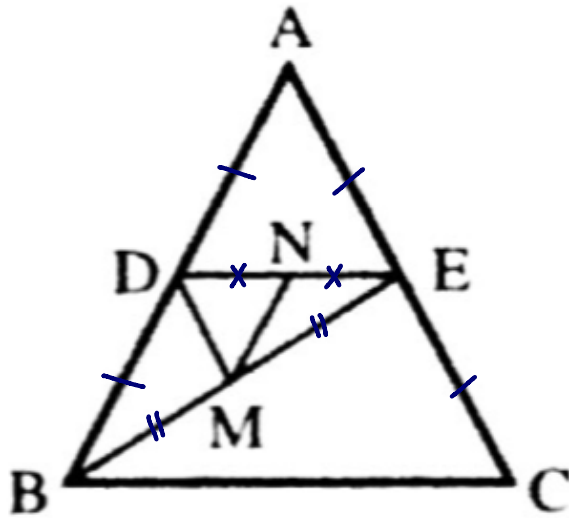
מסכום זווית אלכסון $\triangle EBH$ 180°

(10) $\angle BEH = 30^\circ$

שלוש זוויות מתחלפות מתחלפות זהה שאלה 14 עמ' 155 (אמצעים 6 + 10) והם המטלות

(11) $\triangle EBH$ שאלה 14 עמ' 155

ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 22 עמ' 156



המשולש ABC הוא שווה שוקיים
($AB = AC$). הנקודות D, E, M ו-N הן בהתאמה אמצעי הקטעים AB, AC, DE ו-BE.
הוכח: $DM = NM$.

מקבל: $\triangle ABC$ משולש ישרי (השקיים) ($AB = AC$)
 $AD = DB$, $AE = EC$, $DN = NE$, $BM = ME$

נרצה: $DM = NM$

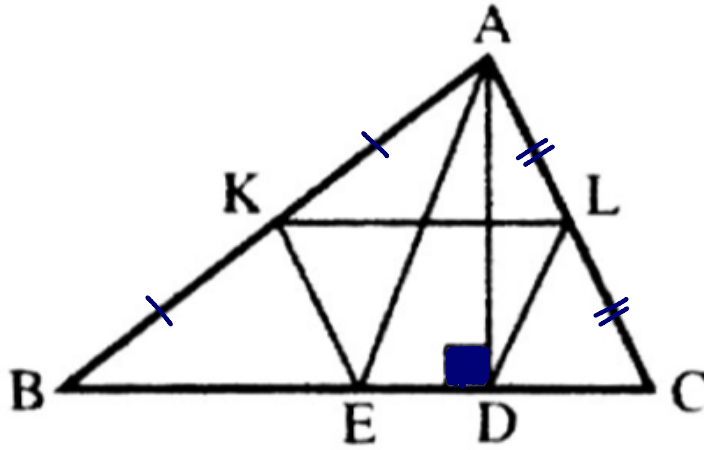
נפרט

נרצה

נפרט	נרצה
מנתונים	(1) $AD = DB = AE = EC$
הקטע AM הוא קטע מחצית	(2) NM הוא קטע מחצית במשולש $\triangle DEB$ DM הוא קטע מחצית במשולש $\triangle ABE$
הקטע AM הוא קטע מחצית (נרצה 2) מחצית זווית, תוארי הזווית השלישית ושקיים	(3) $DM \parallel AE$ $NM \parallel DB$ $DM = \frac{1}{2}AE$ $NM = \frac{1}{2}DB$
מנתונים 3 + מקבל $AB = AC$	(4) $DM = NM$

והוא מקובל

ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 25 עמ' 156

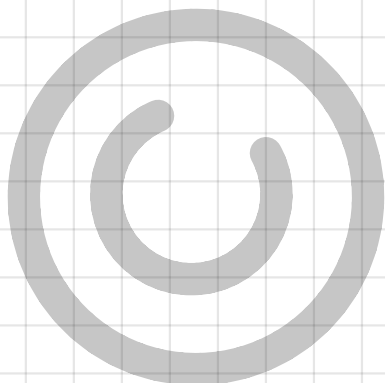


AD הוא הגובה לצלע BC, AE הוא התיכון לצלע BC ו-KL הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
הוכח: המרובע KLEB הוא טרפז שווה שוקיים.

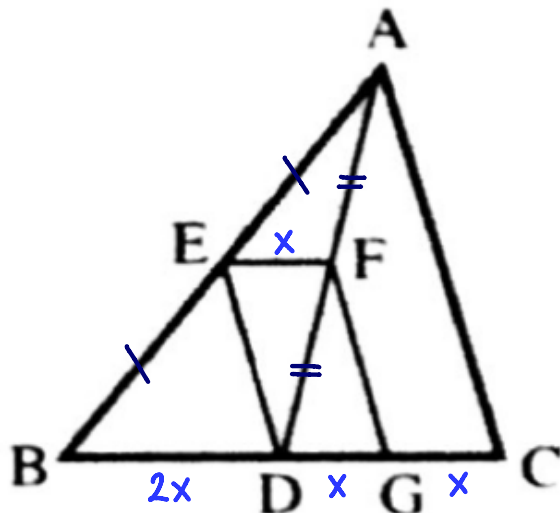
מכאן: $BE=EC$, $AD \perp BC$
KL תלך ממוטת הזווית ABC
($AK=KB$, $AL=LC$)

מלבד ישרות: KLEB שווה שוקיים משולש

הוכחה	הוכחה
הצלע KL מחולקת על ידי AD בנקודה E הצלע KL מקבילה לצלע BC	(1) $KL \parallel BC$
הצלע BE מחולקת על ידי AD בנקודה E הצלע BE מקבילה לצלע AC	(2) $BE \parallel AC$
הצלע KE מחולקת על ידי AD בנקודה E הצלע KE מקבילה לצלע AC	(3) $KE \parallel AC$, $KE = \frac{1}{2} AC$
הצלע DE מחולקת על ידי AD בנקודה E הצלע DE מקבילה לצלע AC	(4) $DE = \frac{1}{2} AC$
הצלע BE מחולקת על ידי AD בנקודה E הצלע BE מקבילה לצלע AC	(5) $KLDE$ שווה שוקיים
הצלע KE מחולקת על ידי AD בנקודה E הצלע KE מקבילה לצלע AC	(6) $KLDE$ שווה שוקיים



ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 28 עמ' 157



AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.
הנקודות E, F ו-G הן בהתאמה אמצעי
הקטעים AB, AD ו-DC.

- א. הוכח: המרובע EFGD הוא מקבילית.
ב. איזה תנאי צריך לקיים המשולש ABC כדי שהמרובע EFGD יהיה מלבן? נמק.
ג. איזה תנאי צריך לקיים המשולש ABC כדי שהמרובע EFGD יהיה מעוין? נמק.

מכאן: $AF = FD$, $AE = EB$, $BD = DC$, $DG = GC$

פתרון: א. ברקע: EFGD מוואי אצלע
ב. מא מה الشرط כי يكون EFGD مستطيل?
ج. מא מה الشرط כי يكون EFGD معين?

شرح

إدعاء

מקטע EF תנאף ضلعين بالثلث هـي قطعة متوسطة

أ. (1) EF قطعة متوسطة بالثلث DABD

القطعة المتوسطة EF بالثلث DABD تملك ضلعين وتوازي
الضلع الثالث وتساوي نصفه

(2) $EF = \frac{1}{2}BD$, $EF \parallel BD$

فرضيه: $DG = GC = x$, من المعطى: $BD = DC = 2x$
من ادعاء 2: $EF = x$

(3) $EF = x$

شكل ربابي به زوج اضلاع متقابلة متوازية ومتساوية هـو
متوازي الاضلاع (ادعاء 3) $EF = DG = x$
(ادعاء 2 - G على امتداد BD) $EF \parallel DG$

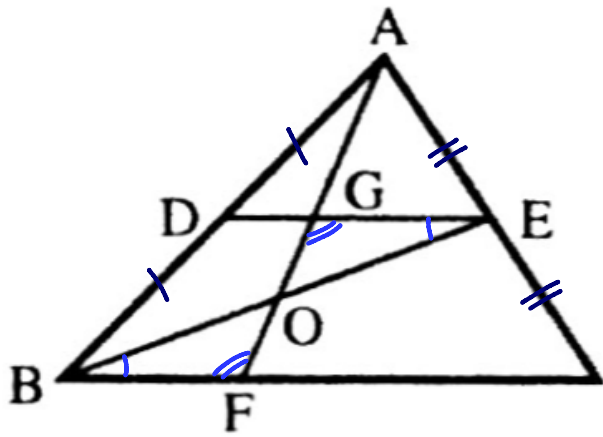
(4) EFGD متوازي اضلاع

وهو المطلوب

ب. احدى زوايا 90° او $EG = FD$

ج. زوج اضلاع متجاورة متساوية او $EG \perp FD$ او FD ينقل زوايا الشكل.

ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 9 עמ' 161



DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

F נקודה על הצלע BC כך שמתקיים

$$BF = \frac{1}{2} FC$$

הקטע AF חותך את DE בנקודה G ואת BE בנקודה O.

הוכח: $BO = EO$

(הדרכה: מצא קטע נוסף השווה ל- $\frac{1}{2} FC$.)

מגלי: DE קטע ממוצע באינט $\triangle ABC$ ($AD = DB, AE = EC$)
 $BF = \frac{1}{2} FC$

ידי: $BO = EO$

נדר

אמצע

הקטע הממוצע DE באינט $\triangle ABC$ נתקף צלעין וקואי
 הצלע האלף ונשאוי נלע

$$DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC \quad (1)$$

קטע נתקף צלע באינט $AE = EC$ וקואי צלע אפר $GE \parallel FC$
 קי קטע ממוצע

(2) GE קטע ממוצע באינט $\triangle AFC$

הקטע הממוצע GE באינט $\triangle AFC$ נתקף צלעין וקואי
 הצלע האלף ונשאוי נלע

$$GE = \frac{1}{2} FC \quad (3)$$

ז. $\angle OGE = \angle OFB$ (זואי משרה משרה מן הוואי $DE \parallel BC$
 לנ. $\frac{1}{2} FC = GE = BF$ (מגלי + אמצע 3)
 ז. $\angle GEO = \angle OFB$ (זואי משרה משרה מן הוואי $DE \parallel BC$)

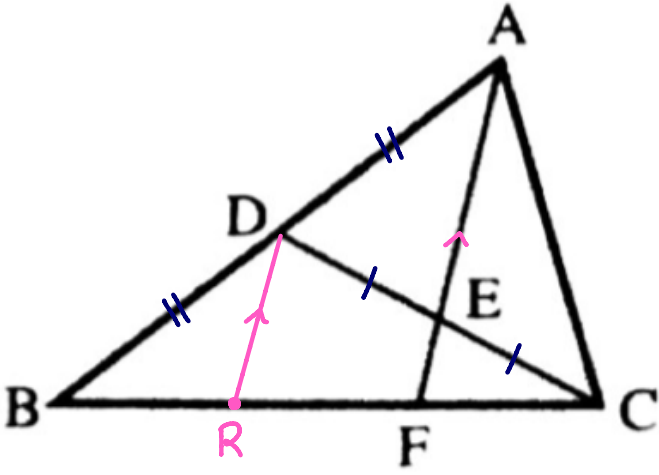
$$\triangle GOE \cong \triangle FOB \quad (4)$$

מן התאב אמצע 4

$$BO = EO \quad (5)$$

והו הצלע

ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 10 עמ' 161



CD הוא התיכון לצלע AB במשולש ABC.
 הנקודה E היא אמצע התיכון CD. המשך
 AE נפגש עם הצלע BC בנקודה F.
 הוכח: $FC = \frac{1}{3} BC$.
**(הדרכה: העבר מהנקודה D מקביל
 לקטע AF).**

$$DE = EC, BD = DA : \text{Ciz}$$

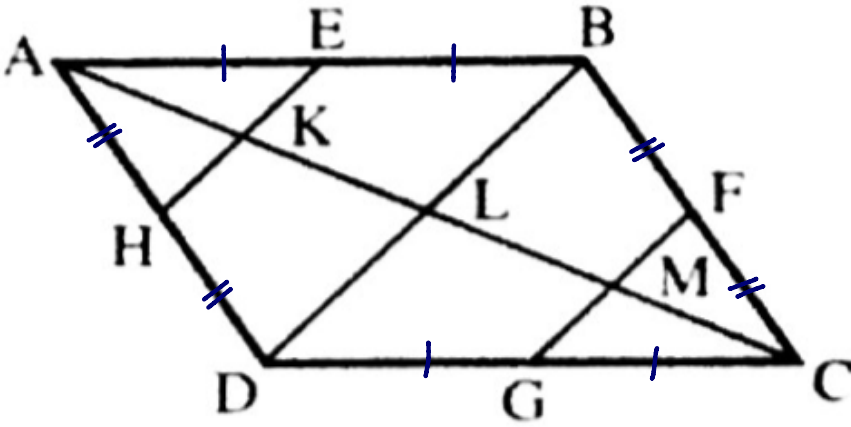
برهان: $FC = \frac{1}{3} BC$

بناء مساعداً: نجد موازي للضلع AF الذي يمر عبر النقطة D

إحداثاء	شرح
(1) DR قطعة متوسطة بالثلث $\triangle ABF$	قطعة تنصف ضلع بالثلث $BD=DA$ وتوازي ضلع آخر $DR \parallel AF$ هي قطعة متوسطة
(2) $BR = RF$	القطعة المتوسطة DR بالثلث $\triangle ABF$ تنصف ضلعين وتوازي الضلع الثالث وتساوي نصفه
(3) EF قطعة متوسطة بالثلث $\triangle DCR$	قطعة تنصف ضلع بالثلث $DE=EC$ وتوازي ضلع آخر $DR \parallel EF$ هي قطعة متوسطة
(4) $RF = FC$	القطعة المتوسطة EF بالثلث $\triangle DCR$ تنصف ضلعين وتوازي الضلع الثالث وتساوي نصفه
(5) $BR = RF = FC$ $FC = \frac{1}{3} BC$	من إحداثاء $4 + 2$ وهو المطلوب

وہم، الخ

ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 13 עמ' 162



המרובע ABCD הוא מקבילית.
 הנקודות E, F, G, H הן אמצעי
 הצלעות. הנקודות K, L, M הן
 בהתאמה נקודות החיתוך של הקטעים
 EH, BD ו- FG עם האלכסון AC.
 הוכח: $AK = KL = LM = MC$

נתון: ABCD מקבילית (AB||DC, AD||BC)
 $AE = EB, BF = FC, DG = GC, AH = HD$

מטרה: $AK = KL = LM = MC$

נניח

אנחנו

הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC, מן הנקודות

(1) EH נקודה ממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 FG נקודה ממוצעת של הצלעות AD ו- BC

הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC

(2) $HE \parallel DB$, $GF \parallel DB$
 $HE = \frac{1}{2}DB$, $GF = \frac{1}{2}DB$

נקודה ממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC

(3) GM נקודה ממוצעת של הצלעות AD ו- BC

הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC

(4) $CM = ML$

נקודה ממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC

(5) HK נקודה ממוצעת של הצלעות AD ו- BC

הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC
 הנקודה הממוצעת של הצלעות AD ו- BC

(6) $AK = KL$

אנחנו מקבילית ABCD נתון בעזרתה

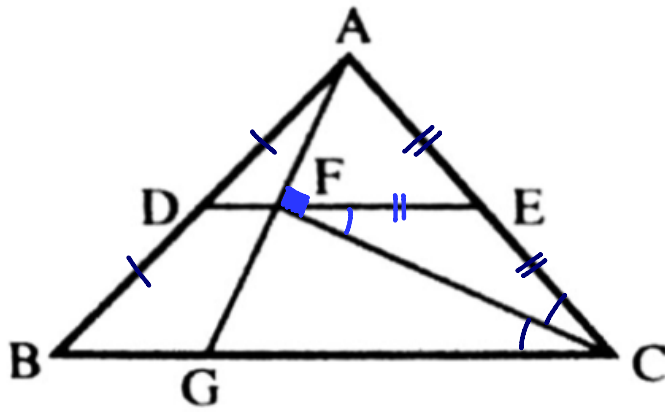
(7) $AL = LC$

מן אנחנו 7+6+4

(8) $AK = KL = LM = MC$

והם הנקודות

ספר בני גורן- הנדסה ב' - קטע אמצעים שאלה 7 עמ' 164



DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

חוצה הזווית C חותך את DE בנקודה F.

המשך הקטע AF חותך את הצלע BC

בנקודה G.

הוכח: $GC = AC$.

מפתח: DE תלעה ממוסלל באלחלל ABC
($AD = DB, AE = EC$)

$$\angle FGC = \angle FCE$$

לרללל, $GC = AC$

לשר

אכלל

אללללל אלחלוסלל DE באלחלל $\triangle ABC$ לללללל לללללל וולללל
אלללל ללללל ווללללל ללללל

$$DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC \quad (1)$$

זולל מללללל מללללללל מלללללל וולללל $DE \parallel BC$

$$\angle EFC = \angle FCG \quad (2)$$

ללללל לללללל מלללללללללל $\angle EFC = \angle ECF$ (אכלל 2 מללל)

$$\triangle FEC \text{ מלללללללללל (אללללל)} \quad (3)$$

$$(FE = EC)$$

ללללל ללללל ללללל לללללללללל ללללל ללללל אללל
 $FE = \frac{1}{2} AC$ (מלללל 3 מללל) לללל ללללל לללל

$$AF \perp FC \quad (4)$$

$$\triangle AFC \text{ ללללל ללללל לללללל}$$

ללללל ללללל לללללל (לללל) לללל ללללל לללללללללל
אלללל ללללל מלללללללללל

$$\triangle AGC \text{ מלללללללללל} \quad (5)$$

$$AC = GC$$

והו אללללל