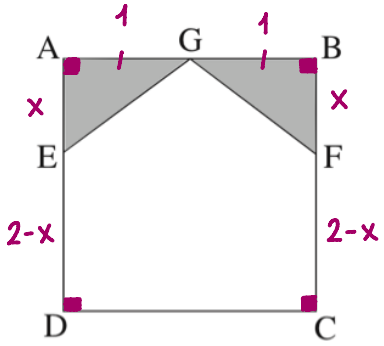
بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ١

١. بنوا نافذة زجاجية شكلها مربّع ABCD طول ضلعه 2 متر.
صُمّمت اثنتان من زوايا المربّع على شكل مثلثين متطابقين AGE وَ BGF بحيث AE = BF = x (انظر الرسم).
المثلثان مصنوعان من زجاج ملوّن،
وبقية النافذة مصنوعة من زجاج عادي.
ثمن المتر المربّع من الزجاج الملوّن هو 20 شيقل، وثمن المتر المربّع من الزجاج العادي هو – 10 شيقل.
أعطى البائع تخفيضًا نسبته 22% على الزجاج الملوّن وَ 10% على الزجاج العادي.
مجموع التخفيض على نوعَي الزجاج اللازمين لبناء النافذة كان 14%.
جد طول AE.



$AG=GB=\frac{AB}{2}=1$ م

* مساحة الزجاج الملوّن: $S_{\text{ملوّن}}=S_{\triangle AEG}+S_{\triangle GBF}=\left(\frac{x\cdot 1}{2}\right)\cdot 2=x$ متر²
ثمن تصنيع الزجاج الملوّن للنافذة: $x\cdot 20$ شاقل
الثمن بعد تخفيض 22%: $20\cdot x\left(\frac{100-22}{100}\right)=15.6x$ شاقل

** مساحة الزجاج العادي: $S_{\text{عادي}}=S_{ABCD}-S_{\text{ملوّن}}=2^2-x=4-x$ متر²
ثمن تصنيع الزجاج العادي للنافذة: $(4-x)\cdot 10$ شاقل
الثمن بعد تخفيض 10%: $(4-x)\cdot 10\cdot\left(\frac{100-10}{100}\right)=(4-x)\cdot 9$ شاقل

*** الثمن الكلي قبل التخفيض: $20x+(4-x)\cdot 10=20x+40-10x=10x+40$
الثمن الكلي بعد التخفيض: $15.6x+(4-x)\cdot 9=15.6x+36-9x=6.6x+36$
-14%

$(10x+40)\cdot\left(\frac{100-14}{100}\right)=6.6x+36$

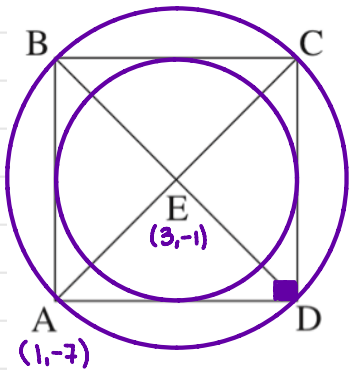
$(10x+40)\cdot 0.86=6.6x+36$
$8.6x+34.4=6.6x+36$
$2x=1.6 \quad |:2$
$x=0.8$ ← AE = 0.8 م

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٢

٢. قطرا المربّع ABCD يلتقيان في النقطة E (انظر الرسم).

إحداثيات الرأس A هي $(1, -7)$.

معادلة القطر BD هي $x + 3y = 0$.



أ. (١) جد ميل القطر AC.

(٢) جد إحداثيات النقطة E.

ب. جد معادلة الدائرة التي تحصر المربّع.

جـ. احسب طول ضلع المربّع.

د. جد معادلة الدائرة المحصورة في المربّع بحيث أضلاع المربّع تمسّ الدائرة.

$3y = -x \;|:3$

$y_{BD} = -\frac{1}{3}x$ ←

أ. (١) اعطاء المربع تعامد بطريقتين البعدين، اي $BD \perp AC \Leftarrow m_{BD} \cdot m_{AC} = -1$

$-\frac{1}{3} \cdot m_{AC} = -1 \;|\cdot -3$

$m_{AC} = 3$

(2) نجد معادلة AC. لدينا ميل ونقطة: $A(1,-7)$ $m_{AC} = 3$

$y_{AC} = mx + n$

$-7 = 3 \cdot 1 + n$

$n = -10$

$y_{AC} = 3x - 10$ ←

النقطة E هي تقاطع y_{AC} و y_{BD}.

$\begin{cases} y_{AC} = 3x - 10 \\ y_{BD} = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

$3x - 10 = -\frac{1}{3}x$

$3\frac{1}{3}x = 10 \;|:3\frac{1}{3}$

$x = 3$

نعوض: $y = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$ ← $E(3,-1)$

ب. نجد طول نصف القطر AE. $AE = \sqrt{(-1--7)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}$

مركز الدائرة $E(3,-1)$

معادلة الدائرة: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$

ج. من بند ب ← $AC = 2\sqrt{40}$. نفرض ان ضلع المربع x.

ΔACD فيثاغورس

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$160 = 2x^2$

$80 = x^2$

$x = \sqrt{80}$

د. الدائرة المحصورة نفس نقطة المركز $E(3,-1)$

قطر الدائرة = طول ضلع المربع $= \sqrt{80}$ ← نصف القطر $\frac{\sqrt{80}}{2}$

معادلة الدائرة: ←

$(x-3)^2 + (x+1)^2 = 20$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٣

٣. يلعب سامي ثلاث ألعاب شيش بيش، الواحدة تلو الأخرى.

في كلّ لعبة يمكن أن يفوز سامي أو يخسر (لا يوجد تعادل).

إذا فاز سامي في إحدى الألعاب، فإنّ الاحتمال بأن يفوز في اللعبة التي تليها هو P ،

وإذا خسر في إحدى الألعاب، فإنّ الاحتمال بأن يخسر في اللعبة التي تليها هو P أيضًا.

معطى أنّ $P > 0.5$.

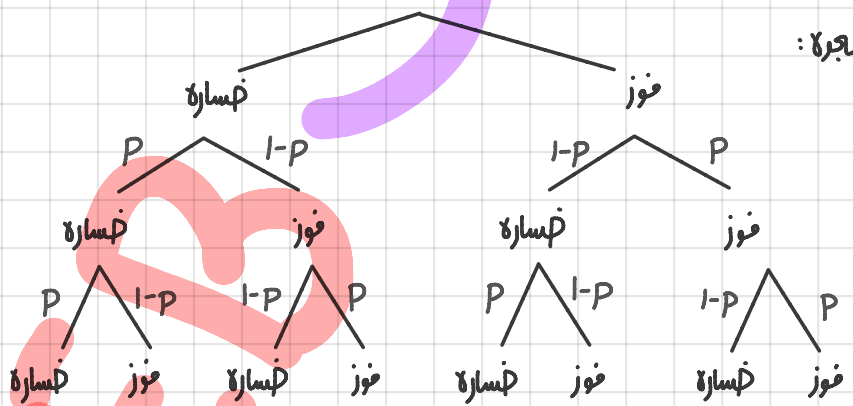
أ. إذا كان معلومًا أنّ سامي فاز في اللعبة الأولى:

(١) عبّر بدلالة P عن الاحتمال بأن يخسر سامي في اللعبة الثانية ويفوز في اللعبة الثالثة.

(٢) احسب P إذا كان معطى أيضًا أنّ الاحتمال بأن يفوز سامي في اللعبة الثالثة هو $\frac{13}{25}$.

ب. استعملْ قيمة P التي حسبتَها، واحسب الاحتمال بأن يفوز سامي في اللعبة الأولى، إذا كان معطى أنّ الاحتمال بأن يفوز سامي في الألعاب الثلاث هو 0.144 .

نبني شجرة:



أ. (1) لعبه اولى ثانيه ثالثه

فوز خسارة فوز

$P = (1-P)(1-P) = (1-P)^2$

(2) الاحتمال بأن يفوز في اللعبه الثالثة:

لعبه اولى ثانيه ثالثه

فوز فوز فوز

فوز خسارة فوز

$P = P \cdot P = P^2$

$P = (1-P)(1-P) = (1-P)^2$

$+$

$P^2 + (1-P)^2 = \frac{13}{25} \longrightarrow P^2 + 1 - 2P + P^2 = \frac{13}{25} \longrightarrow 2P^2 - 2P + \frac{12}{25} = 0 \longrightarrow P = \frac{2 \pm 0.4}{4}$

$P = 0.6$ (معطى $P > 0.5$)

$P = 0.4$ X

ب. نفرض x الاحتمال الفوز في اللعبه الاولى, احتمال الفوز في الالعاب الثلاث:

$X \cdot P \cdot P = 0.144$

نعوض $X \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.144$

$X = 0.4$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٤

٤. الشكل الرباعي ABCD محصور داخل دائرة مركزها M.

AB هو قطر في الدائرة.

AC و DM يلتقيان في النقطة E (انظر الرسم).

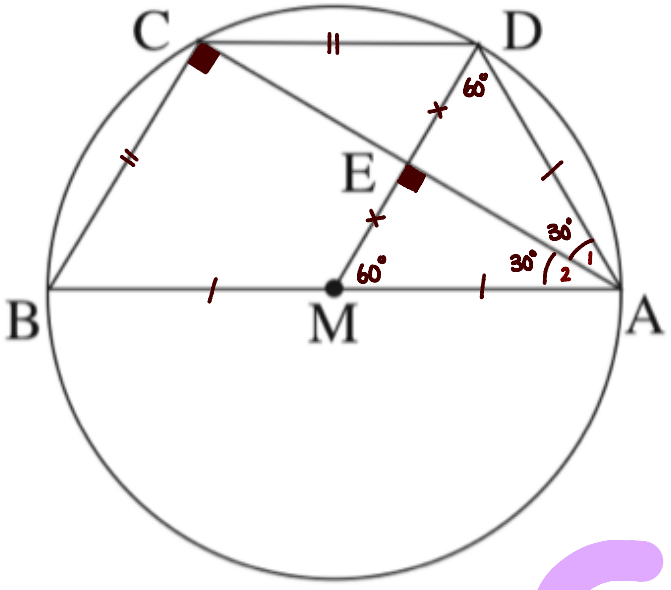
معطى أنّ: $AD = AM$ ، $CD = CB$.

برهن أنّ:

أ. $ME = ED$.

ب. $CB \parallel DM$.

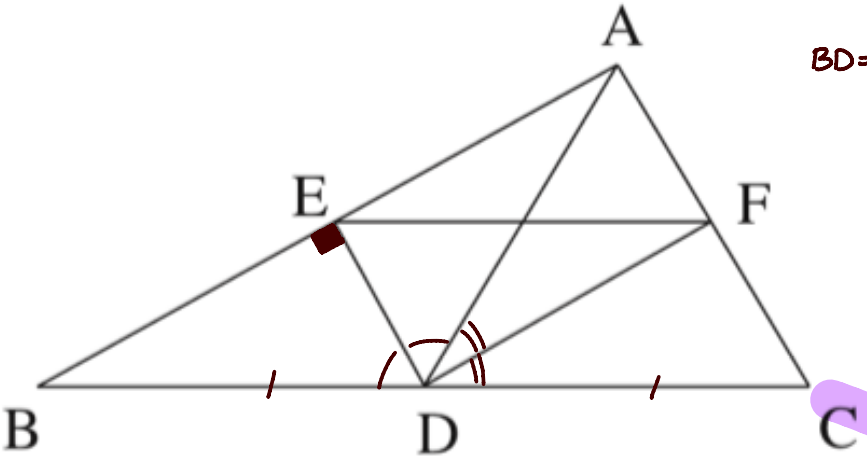
جـ. $CD \parallel BM$.



	إدعاء	شرح
أ. (1)	$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$	زوايا محيطيه الحقابله للاوتار متساوية $(CB=CD)$ هم متساوية
(2)	$AE \perp MD$, $ME = ED$	ΔMDA متساوي الاضلاع (معطى: $MA=AD$, $MD=MA$ انصاف اقطار) AE ضلّف زاويه A اذاً هو ايضاً ارتفاع للقاعدة MD ويوسطه. وهو المطلوب.
ب. (3)	$\measuredangle BAC = 90°$	الزاوية المحيطيه الحقابل لقطر الدائرة (AB) هي قائمة
(4)	$CB \parallel DM$	$CB \parallel DM \Leftarrow$ زوايا متناظرة متساويه $\measuredangle BCA = \measuredangle MEA = 90°$ وهو المطلوب
ج. (5)	$\measuredangle DMA = \measuredangle A = \measuredangle MDA = 60°$ $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = 30°$	بمثلث متساوي الاضلاع ΔMDA, زواياه متساويه مقدارها $60°$.
(6)	$\measuredangle DCA = 30°$	شكل رباعي محاط بدائرة, مجموع كل زوج زوايا متقابله مجموعها $180°$ $\measuredangle C + \measuredangle A = 180°$ $\measuredangle ACD + 90° + 60° = 180°$
(7)	$CD \parallel BM$	$CD \parallel BM \Leftarrow$ زوايا متبادله متساويه $\measuredangle DCA = \measuredangle A_2 = 30°$ وهو المطلوب.

© Yeb School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٥



٥. في المثلث ABC المستقيم المتوسّط للضلع BC هو AD ، $BD=DC$

DE هو منصّف الزاوية $\sphericalangle ADB$ ،

DF هو منصّف الزاوية $\sphericalangle ADC$ (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ:

(١) $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$.

(٢) $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$.

(٣) $\sphericalangle AEF=\sphericalangle ABC$.

ب. معطى أيضًا أنّ $\sphericalangle BED=90^o$.

برهن أنّ:

(١) $AE=BE$.

(٢) $ED=\frac{1}{2}AC$.

أ.١ DE منصّف الزاوية $\sphericalangle ADB$ اذاً ينتج النسب: $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BD}$ معطى $BD=DC$ ← $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$ وهو المطلوب

أ.٢ DF منصّف الزاوية $\sphericalangle ADC$ اذاً ينتج النسب: $\frac{AD}{DC}=\frac{AF}{FC}$ من بند أ١: $\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EB}$ = $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}$ وهو المطلوب

أ.3 النسب من بند أ٢ تحقق النظرية العكسية لطاليس ⇐ $EF \parallel BC$

← زوايا متناظرة متساوية $\sphericalangle AEF=\sphericalangle ABC$ وهو المطلوب

ب.١ طريقة 1 بالمثلث ABD، ED هو ارتفاع لضلع BA ومنصّف الزاوية التي تقابل نفس الضلع، اذاً المثلث هو متساوي الساقين و ED يوسّط AB ← $BE=EA$

طريقة 2 $\triangle BED \cong \triangle AED$ حسب ز.ض.ز

ض. $\sphericalangle BED=\sphericalangle AED=90^o$ ز

ض. ED ضلع مشترك

ز. $\sphericalangle BDE=\sphericalangle ADE$ (معطى)

وهو المطلوب

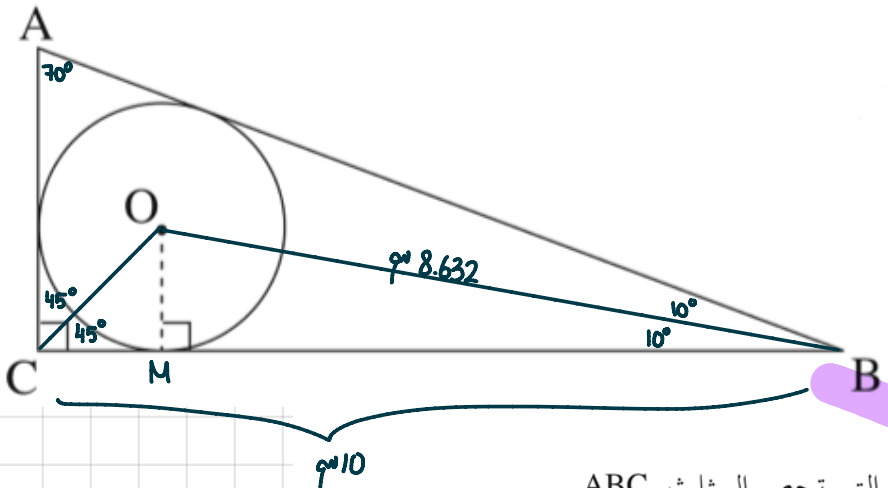
ب.٢ ED هي قطعة بالمثلث التي تنصّف ضلعين (معطى $BD=DC$ ، بند ب١ $BE=EA$) اذاً هي قطعة متوسطة.

القطعة المتوسطة تنصّف ضلعين وتوازي الثالث وتساوي نصفه ← $ED=\frac{1}{2}AC$

وهو المطلوب

© IEB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٦



٦. دائرة مركزها O ونصف قطرها r محصورة داخل مثلث قائم الزاوية ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$) (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\measuredangle CAB = 70^\circ$

$BC = 10$ سم

أ. (١) جد زوايا المثلث COB.

(٢) جد r.

ب. جد النسبة بين r وبين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث ABC.

أ. (١) أضلاع المثلث ABC تمس الدائرة O. مجموع زوايا المثلث $180^\circ \Leftarrow \measuredangle B = 20^\circ$.

المماسان الخارجان من نفس النقطة إلى الدائرة، متساويان والقطعة الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة التي يخرج منها مماسان للدائرة، تنصّف الزاوية بين المماسين.

$\Leftarrow$ $\measuredangle ACO = \measuredangle OCB = 45^\circ$

$\measuredangle CBO = \measuredangle ABO = 10^\circ$

مجموع زوايا المثلث $\triangle COB$: 180° $\quad \measuredangle COB = 125^\circ$

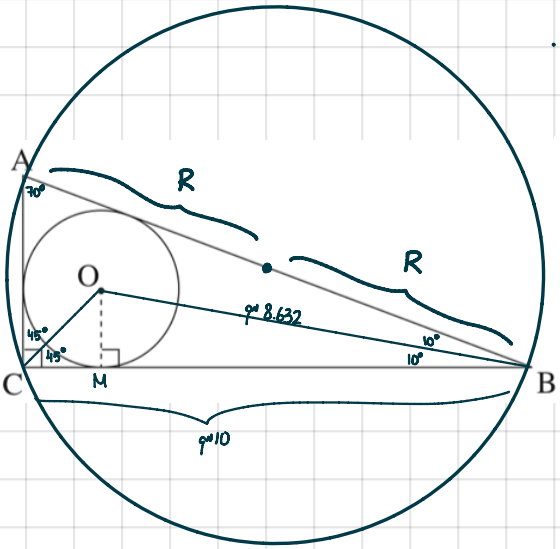
(2) بالمثلث $\triangle BCO$ نظرية sin :

$$\frac{BO}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin 125^\circ} \leftarrow \frac{BO}{\sin(\measuredangle OCB)} = \frac{CB}{\sin(\measuredangle COB)} \leftarrow BO = 8.632 \text{ س}$$

مثلث قائم الزاوية $\triangle OMB$:

$$\sin(\measuredangle OBM) = \frac{OM}{OB} \leftarrow \sin 10^\circ = \frac{r}{8.632} \leftarrow r = 1.498 \text{ س}$$

ب.



* الزاوية المحيطية القائمة بالدائرة تقابل قطر الدائرة $AB = 2R$

* مثلث قائم $\triangle ABC$:

$$\sin(\measuredangle A) = \frac{CB}{AB} \leftarrow \sin 70^\circ = \frac{10}{2R}$$

$$2R = \frac{10}{\sin 70} \rightarrow R = 5.32 \text{ س}$$

* النسبة المطلوبة:

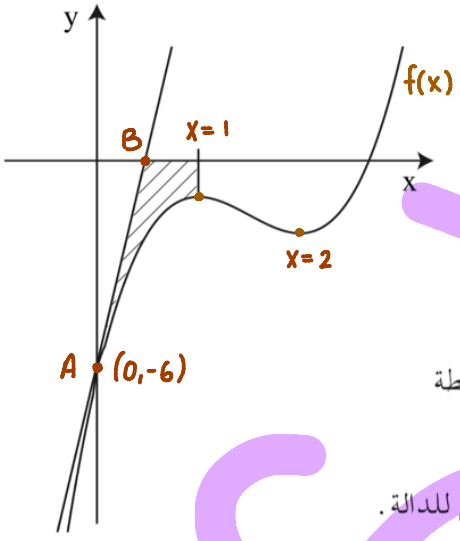
$$\frac{r}{R} = \frac{1.498}{5.32} = 0.2815$$

© VEB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٨

٨. يعرض الرسم الذي أمامك رسمًا تقريبيًا للدالة $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ ،

a هو بارامتر.



أ. جد الإحداثيين x للنقطتين القصويين للدالة f(x) ، وبرهن أنّ إحداهما هي نهاية عظمى وأنّ الأخرى هي نهاية صغرى.

ب. معطى أنّ المستقيم $y = -8x + 14$ يمرّ عبر نقطة النهاية الصغرى للدالة f(x) .
جد قيمة البارامتر a .

جـ. يمرّرون مماسًا للرسم البياني للدالة f(x) في نقطة تقاطع الرسم البياني مع المحور y ، ويمرّرون عمودًا على المحور x عبر نقطة النهاية العظمى للدالة.
عوّض قيمة a التي وجدتَها في البند "ب"، واحسب المساحة المحصورة بين المماس والعمود والرسم البياني للدالة f(x) والمحور x (المساحة المخطّطة في الرسم).

أ. نجد النقاط الحرجة للدالة f(x): $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \quad \backslash 6$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x = 2, 1$

نجد نوع النقاط الحرجة: $f''(x) = 12x - 18$

$f''(x=1) = 12 \cdot 1 - 18 < 0$ MAX

$f''(x=2) = 12 \cdot 2 - 18 > 0$ MIN

ب. $y = -8x + 14$ يتقاطع مع الدالة f(x) عندما $x = 2$ ← $y_{x=2} = f(x=2)$

$-8 \cdot 2 + 14 = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - a$

$-2 = 4 - a$

$a = 6$

ج. يجب ان نجد معادلة المماس للرسم البياني f(x) في نقطة تقاطع الرسم البياني مع محور y :

النقطة A : $f(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 6 = -6$ $\quad A(0,-6)$

ميل المماس للدالة في النقطة A : $m = f'(x=0) = 6 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 12 = 12$ ← $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

معادلة المماس: $y = 12x - 6$ ⇐ $y = mx + n$ ⇐

$-6 = 12 \cdot 0 + n$

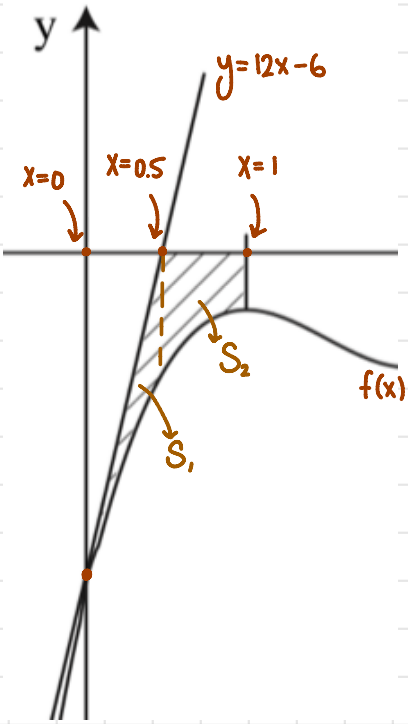
$n = -6$

* نجد نقطة تقاطع المماس مع محور x :

$0 = 12x - 6$

$12x = 6$

$x = \frac{1}{2}$ ← $B(\frac{1}{2}, 0)$



$$S_1 = \int_0^{0.5} (y_{\text{üst}} - f(x))\,dx = \int_0^{0.5} (12x-6-(2x^3-9x^2+12x-6))\,dx$$

$$= \int_0^{0.5} (12x-6-2x^3+9x^2-12x+6)\,dx = \int_0^{0.5} (-2x^3+9x^2)\,dx$$

$$= \left(-2\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{0.5} = (-0.5x^4+3x^3)\Big|_0^{0.5}$$

$$= (-0.5\cdot 0.5^4 + 3\cdot 0.5^3) - (-0.5\cdot 0^4 + 3\cdot 0^3) = \frac{11}{32} = 0.34375$$

$$S_2 = \int_{0.5}^{1} (x_{\text{üst}} - f(x))\,dx = \int_{0.5}^{1} (0-(2x^3-9x^2+12x-6))\,dx$$

$$= \int_{0.5}^{1} (-2x^3+9x^2-12x+6)\,dx = \left(-2\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 12\cdot\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{0.5}^{1}$$

$$= (-0.5x^4+3x^3-6x^2+6x)\Big|_{0.5}^{1}$$

$$= (-0.5\cdot 1^4 + 3\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 6\cdot 1) - (-0.5\cdot 0.5^4 + 3\cdot 0.5^3 - 6\cdot 0.5^2 + 6\cdot 0.5)$$

$$= 2.5 - \frac{59}{32} = \frac{21}{32} = 0.65625$$

$$\Rightarrow \text{Alan } S = S_1 + S_2 = \frac{11}{32} + \frac{21}{32} = 1$$

YBB School
©

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٠ موعد ب - سؤال ٩

٩. معطاة الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + bx + 5}$ ، b هو بارامتر.

معطى أنّ ميل المستقيم الذي يمسّ الرسم البياني للدالة في النقطة التي فيها $x = 0$ هو $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

$f'(x=0) = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

أ. جد قيمة b.

عوّض $b = -6$ ، وأجب عن البنود "ب" – "هـ".

ب. جد مجال تعريف الدالة.

جـ. جد نقاط تقاطع الدالة مع المحورين.

د. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

هـ. ارسم رسمًا تقريبيًا للرسم البياني للدالة.

أ. نشتق الدالة ونعوّض المعطى:

$f'(x) = \frac{2x+b}{2\sqrt{x^2+bx+5}} \leftarrow f'(x=0) = \frac{0+b}{2\sqrt{0+0+5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

ضرب تبادلي: $\frac{b}{2\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$

$5b = -6 \cdot 5 \quad | :5$

$b = -6$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$	$f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}}$

ب.

$x^2-6x+5 \geq 0$

$(x-5)(x-1) \geq 0$

$x \leq 1 \ , \ x \geq 5$ מ.ת

نقاط الطرف: (1,0) (5,0)

$f(1) = \sqrt{1^2-6\cdot1+5} = 0$

$f(5) = \sqrt{5^2-6\cdot5+5} = 0$

جـ. نقطع مع x: $y=0$: $f(x) = \sqrt{x^2-6x+5} = 0 \ |^2$

$x^2-6x+5=0$

$(x-5)(x-1)=0$

$x=1,5$

(1,0) (5,0)

نقطع مع y: $x=0$: $f(x=0) = \sqrt{0^2-6\cdot0+5} = \sqrt{5} = 2.23$

(0, 2.23)

د. نجد النقاط الحرجة: $f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}} = 0 \quad | \cdot 2\sqrt{x^2-6x+5}$

$2x-6=0$

$2x=6$

$x=3$

ليس بالمجال

$\emptyset$ لا يوجد نقاط حرجة

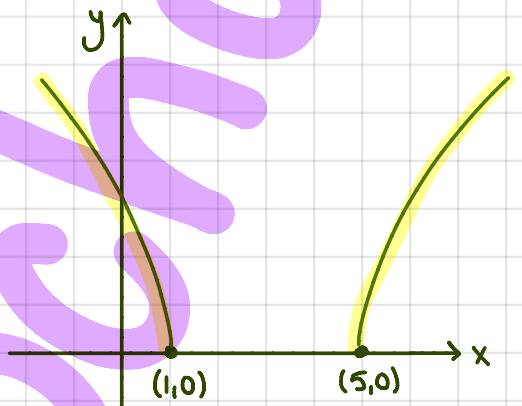
YBD School

نرتّب بجدول بحث مجال التعريف ونقاط الطرف :

	(x=0)				(x=6)
	$x<1$	$x=1$	$5>x>1$	$x=5$	$x>5$
$f'(x)$	$\frac{-6}{+}<0$				$\frac{6}{+}>0$
$f(x)$	↘	MIN $(1,0)$		MIN $(5,0)$	↗

مجال تناقصي $x<1$ ، مجال تزايدي $x>5$

ب.



Yeb School
©