بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ١

1. كان ثمن الهاتف الخلوي في المحلّ "أ" 600 شيقل. ارتفع هذا الثمن بنسبة مئوية معيّنة.
كان ثمن نفس الهاتف الخلوي في المحلّ "ب" 900 شيقل. انخفض هذا الثمن بنفس النسبة المئوية التي ارتفع بها ثمن الهاتف الخلوي في المحلّ "أ"، وعندها أصبح ثمن الهاتف الخلوي في المحلّين متساويًا.
جد الثمن النهائي للهاتف الخلوي.

محلّ أ: 600 شاقل ↑ x%

محلّ ب: 900 شاقل ↓ x%

ثمن الهاتف البدائي:

ثمن الهاتف النهائي: $600\cdot\left(\frac{100+x}{100}\right) = 900\cdot\left(\frac{100-x}{100}\right)$

$$\frac{600(100+x)}{100} = \frac{900\cdot(100-x)}{100}$$

$$6(100+x) = 9(100-x)$$

$$600+6x = 900-9x$$

$$15x = 300 \quad /:15$$

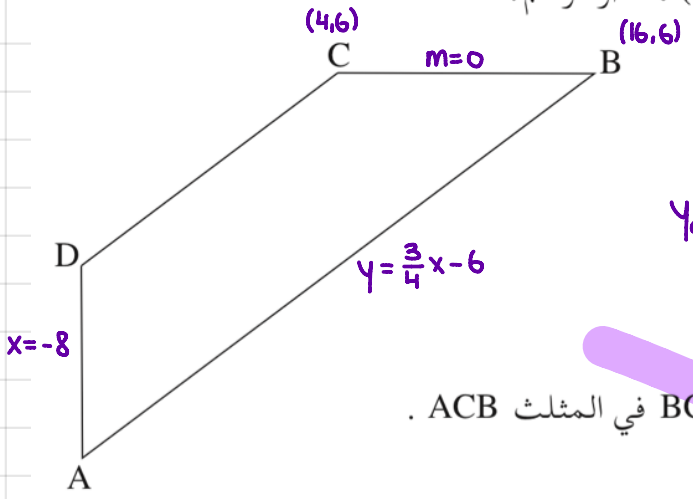
$$x = 20$$

محلّ أ: $600\cdot\left(\frac{100+20}{100}\right) = 720$ شاقل

محلّ ب: $900\left(\frac{100-20}{100}\right) = 720$ شاقل

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٢

2. معطى شبه المنحرف $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ ، انظر الرسم.



معادلة الضلع AB هي $y = \frac{3}{4}x - 6$.

معادلة الضلع AD هي $x = -8$.

ميل الضلع CB هو 0.

إحداثيات الرأس C هي $(4, 6)$.

أ. جد إحداثيات الرؤوس A وَ B وَ D.

ب. (1) جد طول الارتفاع على الضلع BC في المثلث ACB.

(2) جد مساحة المثلث ACB.

أ. A هو تقاطع AD , AB

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 6 \\ x = -8 \end{cases} \leftarrow y = \frac{3}{4}\cdot(-8) - 6 \leftarrow y = -6 - 6 = -12 \leftarrow A(-8,-12)$$

B هو تقاطع CB مع AB

$$\begin{cases} y = 6 \\ y = \frac{3}{4}x - 6 \end{cases} \leftarrow 6 = \frac{3}{4}x - 6 \leftarrow 12 = \frac{3}{4}x \;/\cdot\frac{4}{3} \leftarrow x = 16 \leftarrow B(16,6)$$

D هو تقاطع DC مع DA

نجد معادلة DC: $DC \parallel AB \Rightarrow m_{DC} = m_{AB} = \frac{3}{4} \leftarrow C(4,6) \leftarrow y_{DC} = mx + n$

$6 = \frac{3}{4}\cdot 4 + n$

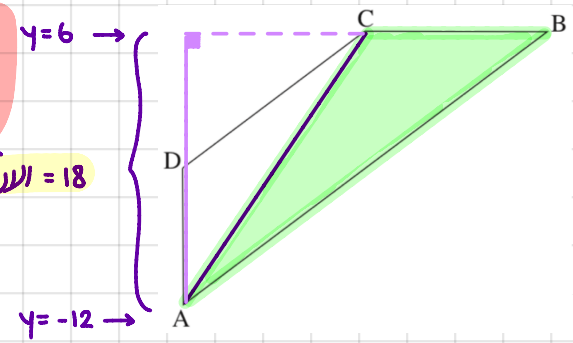
$n = 3$

$y_{DC} = \frac{3}{4}x + 3$

DA: $x = -8$ ↓ , DC: ? ↓

$$\begin{cases} y_{DC} = \frac{3}{4}x + 3 \\ x = -8 \end{cases} \rightarrow y = \frac{3}{4}\cdot(-8) + 3 = -3 \rightarrow D(-8,-3)$$

ب. (1)



(2) $CB = 16 - 4 = 12$ (نجد x-ات B و C)

$S_{\triangle ACB} = \frac{CB \cdot \text{الارتفاع}}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108$ وحدة مساحة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٣

3. توجد في مصنع لإنتاج لامبات الفلورسنت ثلاث آلات : A ، B ، C .

الآلة A تُنتِج 60% من اللامبات .

الآلة B تُنتِج 30% من اللامبات .

الآلة C تُنتِج 10% من اللامبات .

2% من اللامبات التي تُنتِجها الآلة A هي تالفة .

3% من اللامبات التي تُنتِجها الآلة B هي تالفة .

4% من اللامبات التي تُنتِجها الآلة C هي تالفة .

أ. (1) جد النسبة المئوية للّامبات التالفة في المصنع.

(2) نختار عشوائيًّا لامبة واحدة من بين اللامبات التالفة .

ما هو الاحتمال بأن تكون اللامبة التي اخترناها قد أنتجتها الآلة C ؟

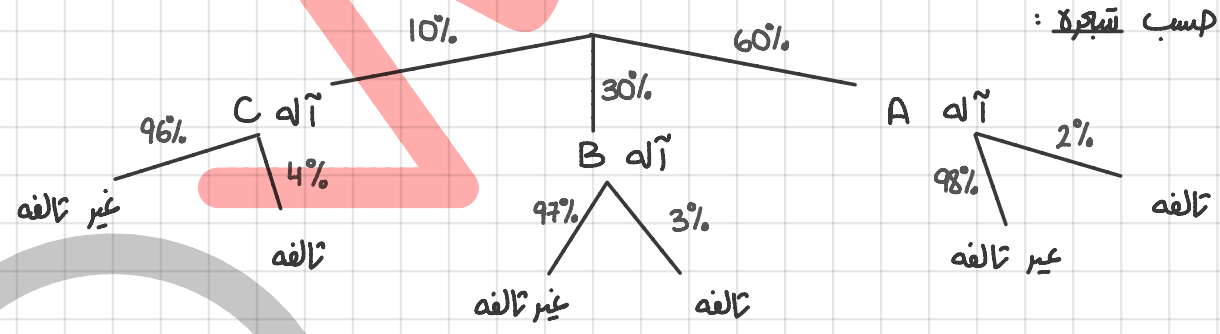
ب. نختار عشوائيًّا 5 لامبات من بين اللامبات التي يُنتِجها المصنع .

ما هو الاحتمال بأن تكون 3 منها على الأكثر صالحة؟

جدول:

	A آلة	B آلة	C آلة	مجموع
لامبة تالفة D	$\frac{2}{100}\cdot 60\% = 1.2\%$	$\frac{3}{100}\cdot 30\% = 0.9\%$	$\frac{4}{100}\cdot 10\% = 0.4\%$	2.5%
لامبة غير تالفة $\overline{D}$	58.8%	29.1%	9.6%	97.5%
مجموع	60%	30%	10%	100%

او حسب شجرة :



أ. (1) حسب الجدول $P(D) = 2.5\%$

حسب الشجرة $P = 10\%\cdot 4\% + 30\%\cdot 3\% + 60\%\cdot 2\% = 2.5\%$

أ. (2) $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.4\%}{2.5\%} = 0.16$

(P(D) من بند أ)

ب. $n=5$ اختيار 5 لامبات

تجربة برنولي

$P(\bar{D}) = p = \frac{97.5}{100} = 0.975$ احتمال "النجاح" - احتمال ان تكون صالحة

$q = 0.025$ احتمال "الفشل" - احتمال ان تكون غير صالحة

$k = 0,1,2,3$ عدد النجاحات المطلوب: 3 منهم على الاكثر

احتمال المطلوب $= \binom{5}{0} \cdot 0.975^0 \cdot 0.025^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.975^1 \cdot 0.025^4 + \binom{5}{2} \cdot 0.975^2 \cdot 0.025^3 + \binom{5}{3} \cdot 0.975^3 \cdot 0.025^2$

$= 0.0059$

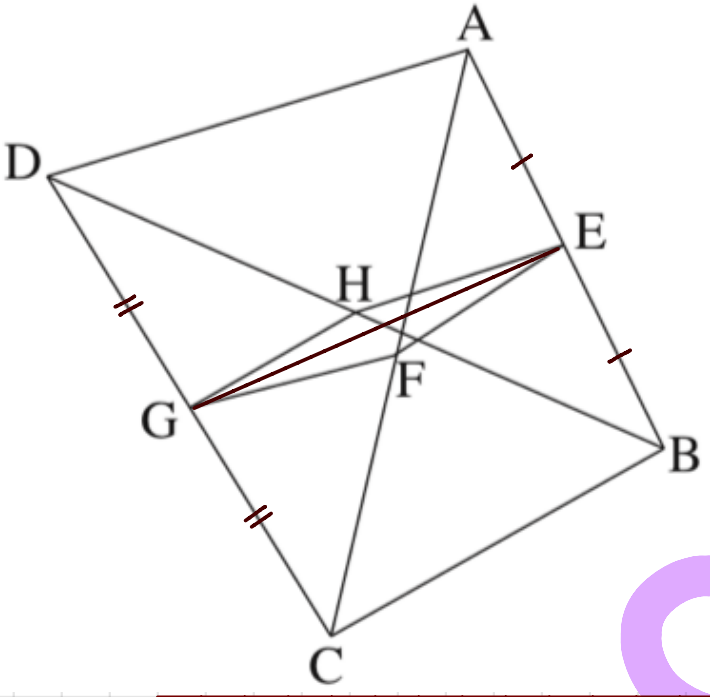
YEB School
©

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٤

4. في الشكل الرباعي ABCD، النقطة E هي منتصف الضلع AB ،
والنقطة G هي منتصف الضلع DC .
النقطة F هي منتصف القطر AC ،
والنقطة H هي منتصف القطر DB (انظر الرسم) .
برهن أنّ :

أ. $EF \parallel HG$.

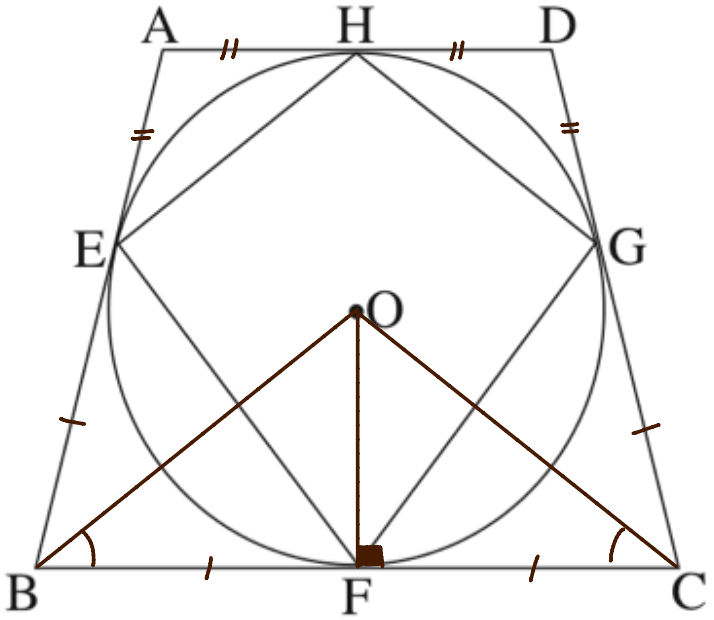
ب. $\Delta EHG \cong \Delta EFG$.



	إدعاء	شرح
أ. (1)	GH قطعة متوسطة بالمثلث ΔDBC	$DH=HB$ $DG=GC$ قطعة بمثلث تنصّف ضلعين بالمثلث هي قطعة متوسطة
(2)	$GH \parallel CB$	القطعة المتوسطة تنصّف ضلعين وتوازي الضلع الثالث
(3)	FE قطعة متوسطة بالمثلث ΔACB	$AE=EB$ $AF=FC$ قطعة بمثلث تنصّف ضلعين بالمثلث هي قطعة متوسطة
(4)	$FE \parallel CB$	القطعة المتوسطة تنصّف ضلعين وتوازي الضلع الثالث
(5)	$GH \parallel FE$	من ادعاء 2 + 4 وهو المطلوب
ب. (6)	$GH=FE=\frac{1}{2}CB$	القطعة المتوسطة بالمثلث (GH بالمثلث ΔDCB , FE بالمثلث ΔACB) تنصّف ضلعين وتوازي الثالث وتساوي نصفه
(7)	GHEF متوازي اضلاع	GHEF شكل رباعي به زوج اضلاع متقابله متوازية ومتساوية هو متوازي الاضلاع (ادعاء 5 + 6)
(8)	$\Delta EHG \cong \Delta EFG$ حسب ض.ض.ض	ض. $GH=FE$ (ادعاء 6) ض. GE مشترك ض. $HE=GF$ (GHEF متوازي الاضلاع لذلك كل زوج اضلاع متقابله متساوية) وهو المطلوب

YBB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٥



5. معطى شبه المنحرف المتساوي الساقين $ABCD$ $(AD \parallel BC)$.

$AB=DC$

أضلاع شبه المنحرف تمسّ دائرة مركزها O في النقاط E وَ F وَ G وَ H (انظر الرسم).

برهن أنّ:

أ. $\Delta BOF \cong \Delta COF$.

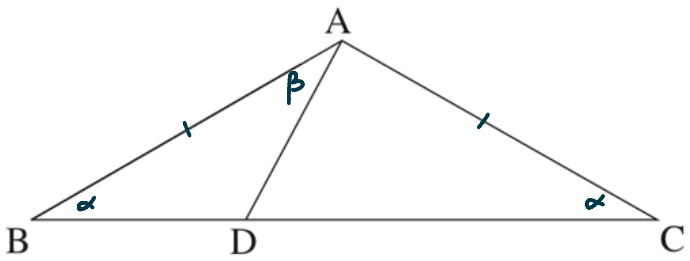
ب. الشكل الرباعي $EHGF$ هو دالتون.

	إدعاء	شرح
أ.	(1) $OF \perp BC$	الخط النازل من مركز الدائرة للمماس OF يعامدها في نقطة التماس
	(2) $\sphericalangle B=\sphericalangle C$, $\sphericalangle A=\sphericalangle D$	في شبه منحرف متساوي الساقين $ABCD$, الزوايا على كل قاعدة متساوية
	(3) $\sphericalangle ABO=\sphericalangle OBC$ $\sphericalangle OCF=\sphericalangle DCO$	القطعة الواصلة بين مركز الدائرة والنقطة التي يخرج منها مماسان للدائرة، تنصّف الزاوية بين المماسين.
	(4) $\Delta BOF \sim \Delta COF$ حسب ز.ز	ز. $\sphericalangle OFB=\sphericalangle OFC=90^\circ$ (1 معطى) ز. $\sphericalangle OBF=\sphericalangle OCF$ (2+3 معطى)
	(5) $\Delta BOF \cong \Delta COF$ حسب ز.ض.ز	المثلثان متشابهان و OF ضلع مشترك
	وهو المطلوب	
ب.	(6) $EB=BF=FC=GC$ $AE=AH=HD=DG$	المماسات الخارجات من نفس النقطة لكل الدائرة، متساويان + معطى $AB=DC$, $BF=FC$ من 5
	(7) $\Delta AEH \cong \Delta DHG$ حسب ض.ز.ض	ض. $AE=DG$ (6 معطى) ز. $\sphericalangle A=\sphericalangle D$ (2 معطى) ض. $AH=HG$ (6 معطى)
	(8) $\Delta EBF \cong \Delta GCF$ حسب ض.ز.ض	ض. $EB=GC$ (6 معطى) ز. $\sphericalangle B=\sphericalangle C$ (2 معطى) ض. $BF=FC$ (6 معطى)
	(9) $EHGF$ دالتون	هو شكل رباعي به زوج أضلاع متجاورة متساوية والضلعان الآخران أيضاً متساويان $EF=FG$ من 8 $EH=HG$ من 7
	وهو المطلوب	

© IBO School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٦

6. معطى المثلث المتساوي الساقين ABC ،
الذي فيه $AB = AC$ وَ $\sphericalangle ABC = \alpha$.
D هي نقطة على القاعدة BC
بحيث $\sphericalangle BAD = \beta$.



أ. عبّر بدلالة α وَ β عن النسبة بين مساحة المثلث ABD ومساحة المثلث ACD .

ب. معطى أيضًا أنّ: $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ ، $\beta = 30^\circ$.

جد α .

أ. * ΔABC متساوي الساقين, لذلك زوايا القاعدة متساوية $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \alpha$
ومجموع زواياه 180° ← $\sphericalangle A = 180 - 2\alpha$

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot \sin\beta}{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AC\cdot \sin(180-2\alpha-\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(180-2\alpha-\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

$(\sin(180-\alpha) = \sin\alpha)$

ب. نحسب نسبة المساحات من بند أ بطريقة ثانية:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BD\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DC\cdot \sin\alpha} = \frac{BD}{DC} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{معطى}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}_{\text{بند أ}}$$

نعوّض: $\beta = 30^\circ$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(2\alpha+30^\circ)}$$

$$\sin(2\alpha+30) = 2\cdot\sin 30^\circ$$
$$\sin(2\alpha+30) = 1$$
$$2\alpha+30 = \text{shift}\sin(1)$$
$$2\alpha+30 = 90$$
$$2\alpha = 60$$
$$\alpha = 30^\circ$$

© FBSchool

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٧

7. معطاة الدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{2x-1}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة $f(x)$.

ب. جد خطوط تقارب الدالة $f(x)$ ، الموازية للمحورين (إذا وُجدت مثل هذه الخطوط) .

جـ. جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.

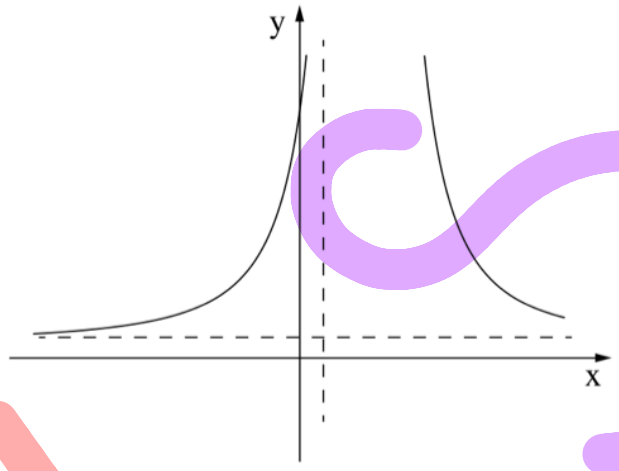
د. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالة (إذا وُجدت مثل هذه المجالات) .

هـ. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة $f(x)$.

و. أمامك رسم تقريبي للرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x)$ في مجال تعريفها.

بالنسبة لأيّة قيَم k المستقيم $y=k$ لا يقطع الرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x)$ ؟

علّل.



أ. مجال تعريف دالة نسبية هو المقام $\neq 0$:

$2x-1\neq 0$

$2x\neq 1$

$x\neq 0.5$:م.ت ←

ب. خط تقارب عامودي : $x=0.5$ (عكس مجال التعريف)

خط تقارب افقي : لا يوجد (اكبر قوى للمتغير x بالبسط اكبر من اكبر قوى للمتغير بالمقام)

ج. تقاطع مع محور y : نعوض $x=0$: $(0,4)$

$f(0)=\frac{0-4}{0-1}=4$

تقاطع مع محور x : نعوض $y=0$

$f(x)=\frac{x^2-4}{2x-1}=0 \;|\cdot 2x-1$

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=2,-2$ ← $(2,0)$ $(-2,0)$

د. نشتق الدالة ونجد النقاط الحرجة للدالة:

$f'(x)=\frac{(2x)(2x-1)-2(x^2-4)}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-2x-2x^2+8}{(2x-1)^2}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x^2-2x+8}{(2x-1)^2}}=0 \;|\cdot (2x-1)^2$$

$2x^2-2x+8=0 \;|:2$

$x^2-x+4=0$ ← $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\varnothing$ ← لا يوجد نقاط حرجة/اكسترا

YED School

نرتّب مجال التعريف بجدول مجالات:

	$(x=0)$ $x<0.5$	$x=0.5$	$(x=1)$ $x>0.5$
$f'(x)$	$\frac{8}{+}>0$	‖	$\frac{8}{+}>0$
$f(x)$	↗	‖	↗

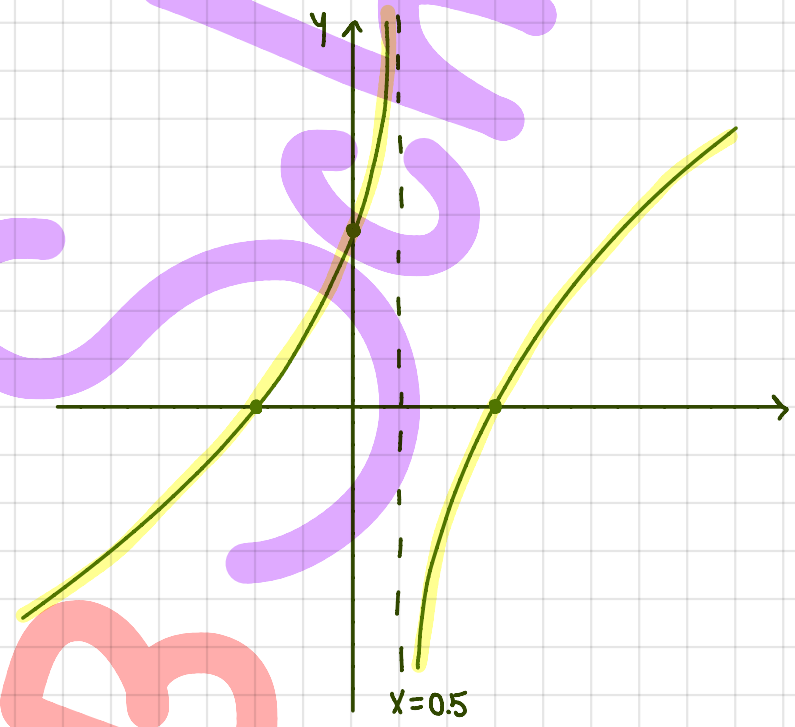
$$f'(x)=\frac{2x^2-2x+8}{(2x-1)^2}$$

يكفي تعويض بالبسط, لان المقام دائماً موجب بسبب وجود التربيع.

مجال تناقص: لا يوجد

مجال تصاعدي: $x<0.5$, $x>0.5$

د.

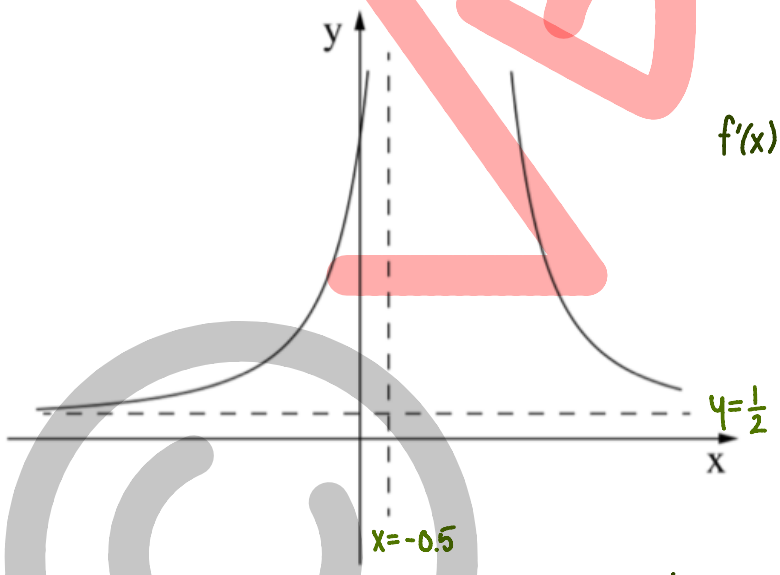


و. أمامك رسم تقريبي للرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x)$ في مجال تعريفها.

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x+8}{(2x-1)^2}$$

بالنسبة لأيّة قيَم k المستقيم $y=k$ لا يقطع الرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x)$ ؟

علّل.



$y=k$ لا يقطع الرسم البياني لدالة المشتقة اذا k اصغر او يساوي خط تقاربها الافقي, نجد الخط التقارب الافقي للدالة:

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x+8}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+8}{4x^2-4x+1} \qquad y=\frac{2}{4}=0.5$$

(اكبر قوى لـ x بالمقام والبسط متساوي لذلك نقسم معاملات الـ x^2)

$$\Rightarrow \quad k\leq 0.5$$

YEB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٨

8. معطاة الدالتان: $f(x) = \sqrt{12-3x}$

$g(x) = -\sqrt{12-3x}$

أ. جد مجال تعريف الدالتين.

ب. جد مجالات تصاعد وتنازل كلّ واحدة من الدالتين (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

جـ. جد نقاط تقاطع كلّ واحدة من الدالتين مع المحورين.

د. ارسم في هيئة محاور واحدة بخطّ متواصل (—) رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة $f(x)$، وارسم بخطّ متقطّع (- - -) رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة $g(x)$.

هـ. مرّروا مستقيمًا يمسّ الرسم البياني للدالة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x=1$، ومرّروا مستقيمًا آخر يمسّ الرسم البياني للدالة $g(x)$ في النقطة التي فيها $x=1$.

(1) جد إحداثيات نقطة التقاء المماسين.

(2) جد مساحة المثلث المحصور بين المماسين والمستقيم $x=1$.

أ. للدالتين نفس التعبير تحت الجذر اي لهم نفس مجال التعريف:

$12-3x \geq 0$

$12 \geq 3x$

$4 \geq x$

$(x \leq 4)$

* نقطة طرف $x=4$

$g(4)=0 \quad (4,0)$

$f(4)=0 \quad (4,0)$

ب. نقاط كل دالة:

$f'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{12-3x}}=0 \quad | \cdot 2\sqrt{12-3x}$

$-3 \neq 0$

لا يوجد نقاط قطوى للدالة

$g'(x)=\frac{-(-3)}{2\sqrt{12-3x}}=0 \quad | \cdot 2\sqrt{12-3x}$

$3 \neq 0$

لا يوجد نقاط قطوى للدالة

	$x<4$	$x=4$	$x>4$
f'	−		
f	↘	$(4,0)$	

الحشقة دائمًا سالبة!

	$x<4$	$x=4$	$x>4$
g'	+		
g	↗	$(4,0)$	

الحشقة دائمًا موجبة!

$\Rightarrow$ دالة $f(x)$: تصاعدي: $x<4$، تنازلي: $\varnothing$

دالة $g(x)$: تصاعدي: $\varnothing$، تنازلي: $x<4$

جـ. دالة $f(x)$

نقاطع مع y: $f(0)=\sqrt{12}$ ← $(0,\sqrt{12})$

نقاطع مع x: $\sqrt{12-3x}=0 \mid^2$

$12-3x=0$

$3x=12$

$x=4$ ← $(4,0)$

دالة $g(x)$

نقاطع مع y: $g(0)=-\sqrt{12}$ ← $(0,-\sqrt{12})$

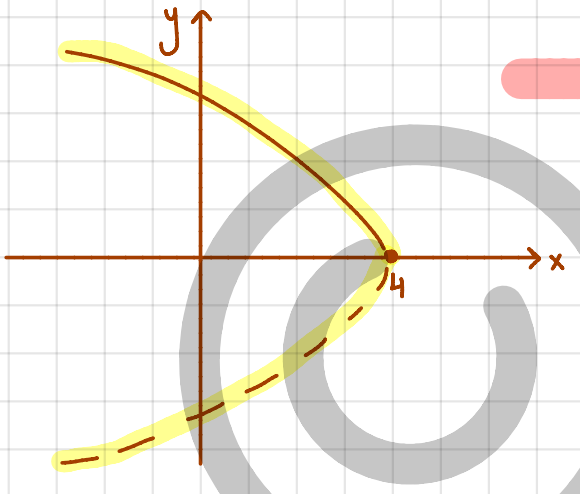
نقاطع مع x: $-\sqrt{12-3x}=0 \mid^2$

$12-3x=0$

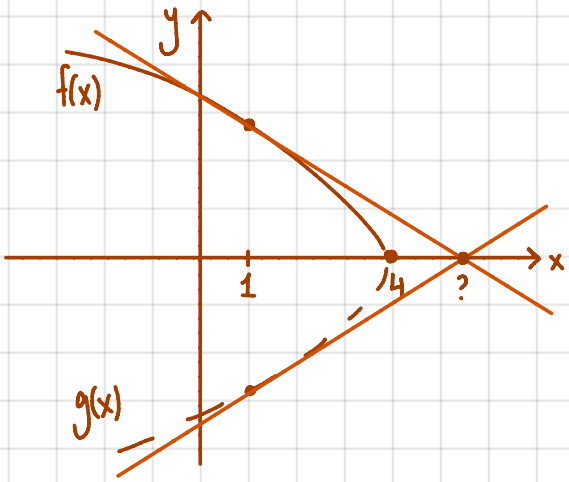
$3x=12$

$x=4$ ← $(4,0)$

د.



YLB School



أ. (1) نجد معادلة المماس للدالة f(x) عندما x=1 :

الميل $m = f'(1) = \frac{-3}{2\sqrt{12-3\cdot1}} = \frac{-3}{6} = -0.5$

نقطة $f(1) = \sqrt{12-3\cdot1} = 3$ $(1,3)$

$y = mx+n$ ⇐

$3 = -0.5\cdot1+n$

$n = 3.5$

معادلة المماس: ⇐ $y = -0.5x+3.5$

نجد معادلة المماس للدالة g(x) عندما x=1 :

الميل $m = g'(1) = \frac{+3}{2\sqrt{12-3\cdot1}} = \frac{3}{6} = 0.5$

نقطة $g(1) = -\sqrt{12-3\cdot1} = -3$ $(1,-3)$

$y = mx+n$ ⇐

$-3 = 0.5\cdot1+n$

$n = -3.5$

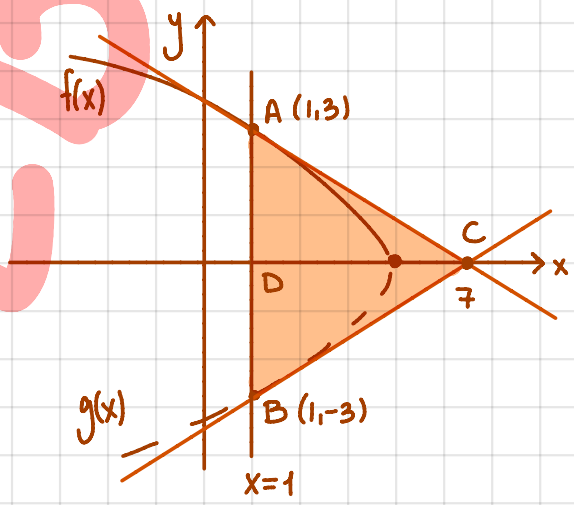
معادلة المماس: ⇐ $y = 0.5x-3.5$

نقطة التقاء المماسين: $0.5x-3.5 = -0.5x+3.5$

$x = 7$

$y = 0.5\cdot7-3.5 = 0$ ← $(7,0)$

ب. (2)



المساحة المطلوبة

$S_{ABC} = \frac{AB\cdot CD}{2} = \frac{6\cdot6}{2} = 18$ وحدة مساحة

↑

$AB = y_A - y_B = 3-(-3) = 6$

CD ← x بما أن محور AB ارتفاع

$CD = x_C - x_D = 7-1 = 6$

VEB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ - سؤال ٩

9. تسافر شاحنة 100 كم بسرعة ثابتة مقدارها x كم/الساعة.

أ. عبّر بدلالة x عن عدد ساعات سفر الشاحنة.

تكلفة سفر الشاحنة هي دالة لسرعتها. f(x)

تكلفة ساعة السفر الواحدة بسرعة x هي $(16+\frac{x^2}{400})$ شيقل.

ب. (1) ماذا يجب أن تكون قيمة x حتّى تكون تكلفة سفر الشاحنة أقلّ ما يمكن؟ MIN

(2) احسب أقلّ تكلفة ممكنة للسفر.

أ. مسافة: 100 كم
سرعة: x كم/ساعة
الزمن = مسافة / سرعة
زمن: $\frac{100}{x}$ ساعات

ب.

(1) تكلفة السفر = ساعات السفر • تكلفة ساعة سفر الواحدة

$$f(x)=\left(16+\frac{x^2}{400}\right)\cdot\frac{100}{x}=\frac{1600}{x}+\frac{x}{4}$$

نجد متى الدالة اصغر ما يمكن:

$$f'(x)=-\frac{1600}{x^2}+\frac{1}{4}=0$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1600}{x^2}$$

$$x^2=6400$$

$$x=80$$

نفحص الجواب حسب جدول بحث: (السرعه x موجب)

	x=1		x=90
	80>x>0	x=80	x>80
f'	−	0	+
f	↘	MIN	↗

(2) نعوّض اصغر قيمة لِـ x (من بند ب 1) لحساب اقل تكلفه ممكنة للسفر:

$$f(x=80)=\frac{1600}{80}+\frac{80}{4}=40$$ شاقل