بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ١

$\left(\frac{100-40}{100}\right)\cdot x = 0.6x$

1. في شركة هواتف معيّنة، سعر دقيقة المكالمة في ساعات المساء أقلّ بـ 40% من سعر دقيقة المكالمة في ساعات النهار.

x

لتشجيع إجراء مكالمات في ساعات المساء، قامت الشركة بتخفيض سعر دقيقة المكالمة في ساعات المساء بـ 18% (سعر دقيقة المكالمة في ساعات النهار لم يتغيّر).

بعد التخفيض، تكلّم أمير 150 دقيقة في ساعات النهار وَ 300 دقيقة في ساعات المساء، ودفع 44.64 شيقل.

جد بالأغورات سعر دقيقة المكالمة في النهار، وسعر دقيقة المكالمة في المساء قبل التخفيض.

سعر الدقيقة في ساعات النهار — سعر الدقيقة في ساعات المساء

x شاقل للدقيقة — $0.6x$ شاقل للدقيقة $\xrightarrow{18\%\downarrow}$ $0.6x\left(\frac{100-18}{100}\right) = 0.492x$ شاقل للدقيقة

* تكلّم أمير $\underbrace{\text{150 دقيقة في ساعات النهار}}$ + $\underbrace{\text{300 دقيقة في ساعات المساء}}$

دفع $150\cdot x + 300\cdot 0.492x = 44.64$

$44.64 = 147.6x + 150x$

$44.64 = 297.6x \quad \backslash : 297.6$

$x = 0.15$

سعر بالأغورات:

دقيقة المكالمات في النهار $0.15\cdot 100 = 15$ اغورة

دقيقة المكالمات في المساء $0.6\cdot 0.15\cdot 100 = 9$ اغورة

(1 شاقل = 100 اغورة)

.2 معطاة دائرة معادلتها $(x-a)^2+(y-3)^2=25$.

a هو بارامتر.

تمرّ الدائرة عبر نقطة أصل المحاور، ومركزها M يقع في الربع الثاني (انظر الرسم).

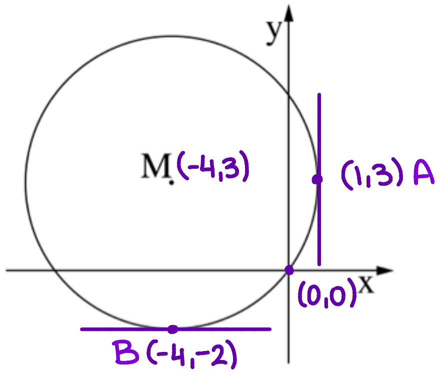
x سالب، y موجب

أ. جد قيمة a .

ب. جد إحداثيات النقاط على محيط الدائرة التي إحداثيّها الـ y أكبر بـ 2 من إحداثيّها الـ x .

نفرض احداثيات الـ x هو t ← اذاً النقطة $(t,t+2)$

ج. في كلّ واحدة من النقاط التي وجدتَها في البند "ب" يمرّرون مماسًا للدائرة. جد معادلات هذه المماسات.



أ. نعوّض النقطة (0,0) في معادلة الدائرة:

$(0-a)^2+(0-3)^2=25$

$a^2+9=25$

$a^2=16$

$a=4,-4$

$M(a,3)$ مركز الدائرة في الربع الثاني ← $a=-4$

ب. معادلة الدائرة: $(x+4)^2+(y-3)^2=25$, نعوّض $(t,t+2)$ بمعادلة الدائرة:

$(t+4)^2+(t+2-3)^2=25$

$t^2+8t+16+(t-1)^2=25$

$t^2+8t+16+t^2-2t+1=25$

$2t^2+6t-8=0 \quad |:2$

$t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0$

$t_1=-4 \quad t_2=1 \longrightarrow$ احداثيات النقاط على محيط الدائرة التي تحقق $(t,t+2)$ هم: $(1,3),(-4,-2)$

ج. النقطة $\overset{A}{(1,3)}$ ومركز الدائرة $M(-4,3)$ لهم نفس احداثيات الـ y ⇐ AM يوازي محور x

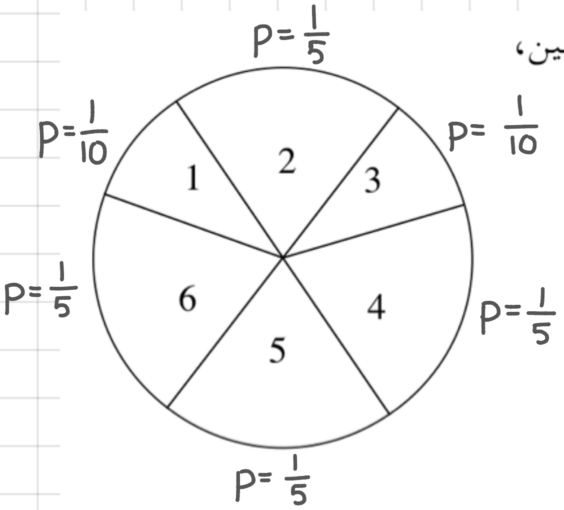
⇐ المماس في النقطة $A(1,3)$ يوازي محور y

⇐ معادلة المماس $x=1$

النقطة $\overset{B}{(-4,-2)}$ ومركز الدائرة $M(-4,3)$ لهم نفس احداثيات الـ x ⇐ BM يوازي محور y

⇐ المماس في النقطة $B(-4,-2)$ يوازي محور x

⇐ معادلة المماس $y=-2$



3. دولاب لعب متوازن مقسّم إلى ستّة قطاعات. على القطاعين، اللذين كلّ واحد منهما هو $\frac{1}{10}$ من الدائرة، مسجّل الرقمان 1 وَ 3، وعلى 4 القطاعات، التي كلّ واحد منها هو $\frac{1}{5}$ من الدائرة، مسجّلة الأرقام 2، 4، 5، 6، كما هو موصوف في الرسم.

عندما نُدير الدولاب، فإنّه يتوقّف على أحد الأرقام (وليس على الخطّ الذي بين القطاعات).

أ. نُدير الدولاب مرّة واحدة.
ما هو الاحتمال بأن يتوقّف الدولاب على رقم زوجي؟

نُدير الدولاب 5 مرّات.

ب. (1) ما هو الاحتمال بأن يتوقّف الدولاب على رقم زوجي مرّتين على الأكثر؟
(2) معلوم أنّ الدولاب قد توقّف على رقم زوجي مرّتين على الأكثر.
ما هو الاحتمال بأن يكون الدولاب قد توقّف على رقم زوجي مرّتين بالضبط؟

جـ. ما هو الاحتمال بأن يتوقّف الدولاب على رقم زوجي فقط في المرّة الأولى وفي المرّة الأخيرة؟

أ. رقم زوجي $=\{2,4,6\}$ $\quad P=P_2+P_4+P_6=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0.6$

ب. (1)
نُدير الدولاب 5 مرات $n=5$
التوقف على عدد زوجي "نجاح" $p=0.6$
الحال "فشل" $q=0.4$
عدد النجاحات المطلوب: مرتين على الأكثر $k=0,1,2$

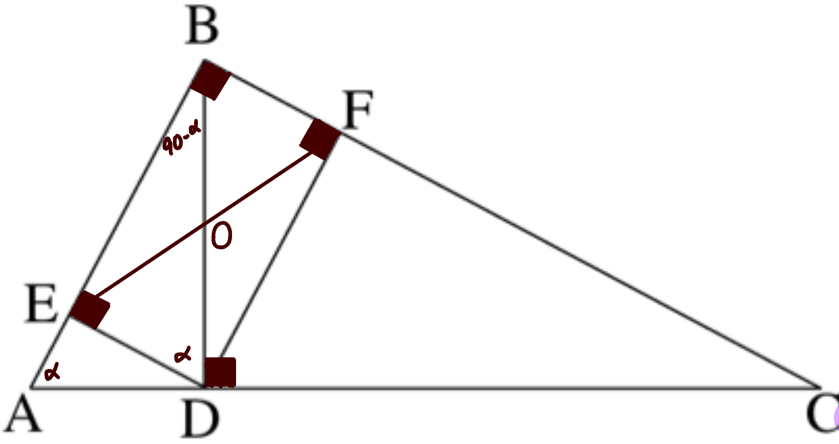
تجربة برنولي

$$P=\binom{5}{0}\cdot0.6^0\cdot0.4^5+\binom{5}{1}\cdot0.6^1\cdot0.4^4+\binom{5}{2}\cdot0.6^2\cdot0.4^3=0.31744$$

(2)
$$P\Big(\underbrace{\text{الدولاب توقف على رقم زوجي مرتين}}_{\substack{k=2\\ \text{(حسب بند (1))}}}\ \Big|\ \underbrace{\text{الدولاب توقف على رقم زوجي مرتين على الاكثر}}_{k=0,1,2}\Big)=\frac{P(\text{توقف الدولاب على عدد زوجي مرتين})}{\underbrace{P(\text{الدولاب توقف على رقم زوجي مرتين على الاكثر})}_{\text{بند 1}}}=\frac{\binom{5}{2}\cdot0.6^2\cdot0.4^3}{0.31744}=0.7258$$

جـ. $P=\underset{\text{نجاح}}{0.6}\cdot\underset{\text{فشل}}{0.4}\cdot\underset{\text{فشل}}{0.4}\cdot\underset{\text{فشل}}{0.4}\cdot\underset{\text{نجاح}}{0.6}=0.02304$ = الاحتمال بأن يتوقّف الدولاب على رقم زوجي فقط في المرة الاولى وفي المرة الاخيرة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٤



4. معطى مثلث قائم الزاوية ($\measuredangle ABC = 90^o$).

BD هو ارتفاع المثلث على الوتر AC .

F هي نقطة على BC بحيث $DF \perp BC$

E هي نقطة على BA بحيث $DE \perp BA$

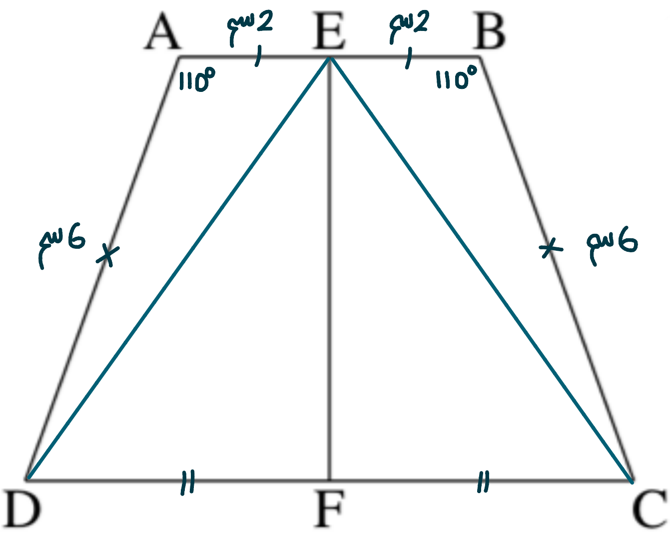
(انظر الرسم).

أ. برهن أنّ EF وَ BD متساويان وينصّف أحدهما الآخر.

ب. برهن أنّ $ED^2 = DF \cdot AE$.

		إدعاء	شرح
أ.	(1)	BFDE مستطيل	شكل رباعي به 3 زوايا قائمة هو مستطيل
	(2)	$BO = FO = DO = EO$	BFDE مستطيل, لذلك اقطاره متساوية وتنصّف بعضها البعض وهو المطلوب
ب.	(3)	$\measuredangle ABD = 90-\alpha^\circ$	نفرض: $\measuredangle A = \alpha$ ΔABD مجموع زوايا المثلث 180°
	(4)	$\measuredangle BDE = \alpha^\circ$	ΔEBD مجموع زوايا المثلث 180°
	(5)	$\Delta AED \sim \Delta DEB$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle A = \measuredangle BDE = \alpha^\circ$ (ادعاء 3+ 4) ز. $\measuredangle AED = \measuredangle BED = 90^\circ$
	(6)	$ED^2 = AE \cdot EB$	نسب التشابه بادعاء 5 : $\frac{AD}{DB} = \frac{ED}{EB} = \frac{AE}{DE}$
	(7)	$EB = DF$	في المستطيل BFDE كل زوج اضلاع متقابله متساوية
	(8)	$ED^2 = DF \cdot AE$	من ادعاء 6 + 7 وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٥



5. معطى شبه منحرف متساوي الساقين ABCD ‏($AB \parallel DC$).

النقطتان E وَ F هما منتصفا القاعدتين AB وَ DC بالتلاؤم (انظر الرسم).

أ. (1) برهن أنّ $ED = EC$.

(2) برهن أنّ $EF \perp DC$.

ب. معطى أنّ: $AB = 4$ سم

$BC = 6$ سم

$\sphericalangle EBC = 110°$

جد مقدار الزاوية ECB.

أ. (1) ABCD شبه منحرف متساوي الساقين ($AD=BC$) لذلك زوايا كل قاعدة متساوية $\sphericalangle A = \sphericalangle B$

$\triangle DAE \cong \triangle CBE$ حسب ض.ز.ض

ض $AE = EB$ معطى

ز $\sphericalangle A = \sphericalangle B$

ض $AD = BC$

$\Leftarrow$ $ED = EC$

وهو المطلوب

(2) $\triangle EDC$ من البند السابق مثلث متساوي الساقين.

EF متوسط للقاعدة في مثلث متساوي الساقين لذلك هو ايضًا ارتفاع على القاعدة ومنصّف زاوية الرأس.

$\Leftarrow$ $EF \perp DC$ وهو المطلوب

ب. $\triangle EBC$ نظرية cos:

$EC^2 = EB^2 + BC^2 - 2 \cdot EB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle EBC)$

$= 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 110°$

$\downarrow$

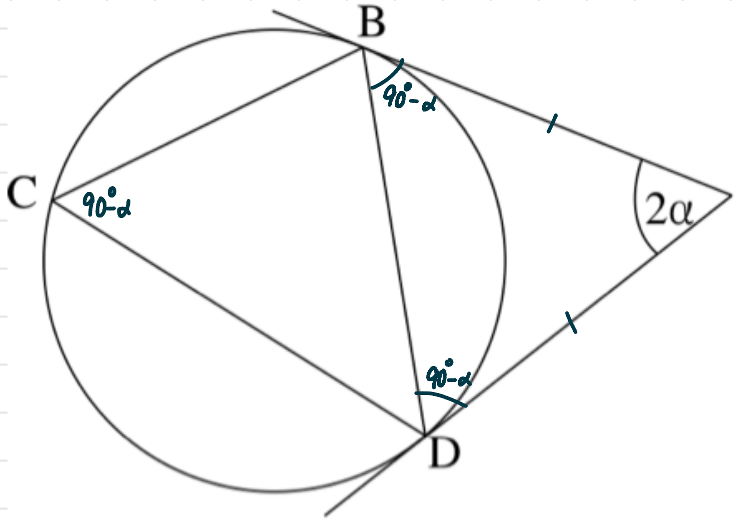
$EC = 6.943$ سم

$\triangle EBC$ نظرية sin:

$\frac{EC}{\sin(\sphericalangle EBC)} = \frac{EB}{\sin(\sphericalangle ECB)} \Leftarrow \frac{6.943}{\sin 110°} = \frac{2}{\sin(\sphericalangle ECB)}$

$\Leftarrow$ $\sphericalangle ECB = 15.705°$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٦



6. مرّروا من النقطة A مماسين لدائرة معيّنة، AB وَ AD .
النقطة C تقع على محيط الدائرة خارج المثلث ABD (انظر الرسم).
معطى أنّ: نصف قطر الدائرة هو 10 سم
$\angle BAD = 2\alpha$

أ. (1) برهن أنّ $\angle BCD = 90^o - \alpha$.
(2) عبّر بدلالة α عن طول AB .

ب. إذا كان معطى أيضًا أنّ $\alpha = 30^o$ وَ $\angle CBD = 70^o$ ،
احسب طول AC .

أ. (١) مماسان خارجان من نقطة واحدة لنفس الدائرة هم متساويان $(AB = AD)$

⇐ $\triangle ABD$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية
مجموع زوايا المثلث $180°$ $\Big\}$ $\angle ABD = \angle BDA = 90° - \alpha$

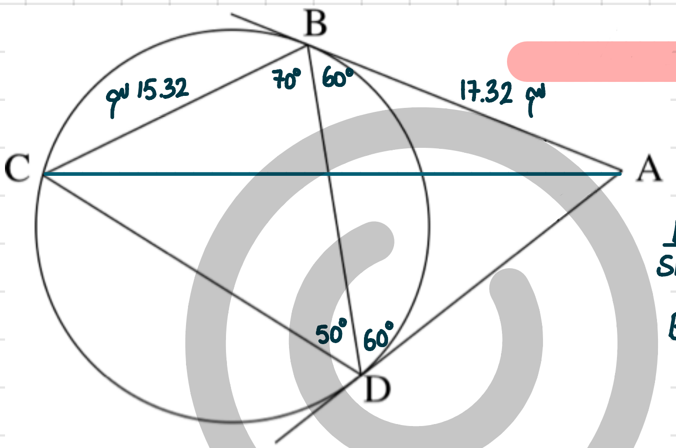
$\angle ABD = \angle BCD = 90° - \alpha$ الزاوية المحصورة بين مماس ووتر (BD) يساوي الزاوية المحيطية المقابله للوتر
وهو المطلوب

(2) $\triangle BCD$ نظرية sin :
$$\frac{BD}{\sin\angle C} = 2R \leftarrow \frac{BD}{\sin(90-\alpha)} = 2\cdot 10 \leftarrow BD = 20\cdot\sin(90-\alpha)$$

$\triangle ABD$ نظرية sin :
$$\frac{BD}{\sin(\angle A)} = \frac{AB}{\sin(\angle BDA)} \rightarrow \frac{20\sin(90-\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$$

$$AB = \frac{20\cdot(\sin(90-\alpha))^2}{\sin 2\alpha} = \frac{20\cdot(\cos\alpha)^2}{\sin 2\alpha}$$

$[\sin(90-\alpha) = \cos\alpha]*$



ب. من المعطيات : $AB = \frac{20\cdot(\cos(30°))^2}{\sin(60°)} = 17.32$ سم

مجموع زوايا المثلث $\triangle BCD$ $180°$ $\rightarrow$ $\angle CDB = 50°$

$\triangle BCD$ نظرية sin :
$$\frac{BC}{\sin(\angle BDC)} = 2R \rightarrow \frac{BC}{\sin 50°} = 2\cdot 10$$
$BC = 15.32$ سم

$\triangle ABC$ نظرية cos :
$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2\cdot BC\cdot BA\cdot\cos(\angle CBA)$$
$$= 15.32^2 + 17.32^2 - 2\cdot 15.32\cdot 17.32\cdot\cos 130°$$

⇐ $AC = 29.59$ سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٧

7. معطاة الدالة $f(x) = -x^2\sqrt{x+5}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة.

ب. جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين.

جـ. هل توجد قيم لـ x تكون بالنسبة لها $f(x) > 0$ ؟ علّل.

د. جد إحداثيات النقاط القصوى للرسم البياني للدالة، وحدِّد نوع هذه النقاط.

هـ. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة.

و. كم حلًّا يوجد للمعادلة $-14 = -x^2\sqrt{x+5}$ ؟ علّل.

أ. $x+5 \ge 0$

$x \ge -5$

ب. تقاطع مع محور y

$f(0) = 0$ $(0,0)$

تقاطع مع محور x

$-x^2\sqrt{x+5} = 0$

$x=0$ $x=-5$ $(0,0)$ $(-5,0)$

ج. $f(x) = \underbrace{-}_{\text{سالب}}\underbrace{x^2}_{\text{موجب}}\cdot\underbrace{\sqrt{x+5}}_{\text{موجب}} > 0$

كلا الداله دائمًا سالبه

د. $\boxed{f'(x) = -2x\cdot\sqrt{x+5} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\cdot(-x^2) = 0} \;\Big/\cdot 2\sqrt{x+5}$

$-4x(x+5) - x^2 = 0$

$-4x^2 - 20x - x^2 = 0$

$-5x^2 - 20x = 0 \;\;/ : -5$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$

$x=0$ $x=-4$

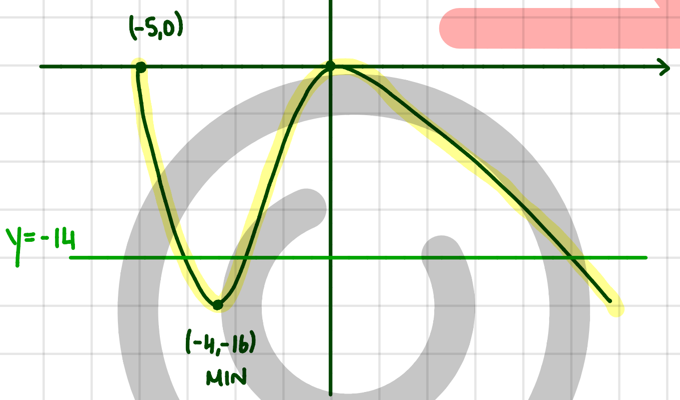
$(0,0)$ $f(-4) = -(-4)^2\sqrt{-4+5} = -16$

$(-4,-16)$

$\Rightarrow$

	$x<-5$	$x=-5$	$-4>x>-5$ ($x=-4.5$)	$x=-4$	$0>x>-4$ ($x=-1$)	$x=0$	$x>0$ ($x=1$)
f'			$-$	0	$+$	0	$-$
f		$(-5,0)$ MAX	↘	$(-4,-16)$ MIN	↗	$(0,0)$ MAX	↘

هـ.



و. $-14 = \underbrace{-x^2\cdot\sqrt{x+5}}$

خط مستقيم ثابت (على الرسم)

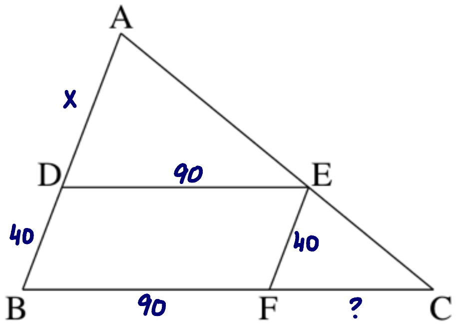
الداله التي رسمناها بالبند ه.

$\Downarrow$

3 حلول

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٨

كل زوج اضلاع متقابله متوازية ومتساوية



8. معطى متوازي الأضلاع DEFB الذي طولا ضلعيه هما:

$BD = 40$ سم ، $DE = 90$ سم .

النقطة A تقع على امتداد الضلع BD ← $AB \parallel EF$

والنقطة C تقع على امتداد الضلع BF ← $DE \parallel BC$

بحيث يمرّ المستقيم AC عبر الرأس E (انظر الرسم).

أ. نرمز: $AD = x$.

استعِن بتشابه المثلثات، وعبّر بدلالة x عن طول القطعة FC .

ب. جد x الذي يكون بالنسبة له مجموع الضلعين AB وَ BC هو أقلّ ما يمكن.

MIN

الدالة التي نريد تكوينها $f(x)$

جـ. جد أقلّ مجموع ممكن للضلعين AB وَ BC .

أ. $\Delta ADE \sim \Delta EFC$ حسب ز.ز :

ز. $\measuredangle A = \measuredangle FEC$ زوايا متناظرة متساوية من التوازي $AB \parallel EF$

ز. $\measuredangle C = \measuredangle AED$ زوايا متناظرة متساوية من التوازي $DE \parallel BC$

⇐ نسب تشابه : $\frac{AD}{EF} = \frac{DE}{FC} = \frac{AE}{EC}$

$$\frac{x}{40} = \frac{90}{FC} \leftarrow \boxed{FC = \frac{3600}{x}}$$

ب. $f(x) = x + 40 + 90 + \frac{3600}{x} = x + 130 + \frac{3600}{x}$ دالة تعبّر عن طول AB و BC

نجد متى $f(x)$ اقل ما يمكن :

$$f'(x) = 1 - \frac{3600}{x^2} = 0$$

$$1 = \frac{3600}{x^2}$$

$$x^2 = 3600$$

$$x = 60, -60$$

(x طول ضلع, اي دائمًا موجب)

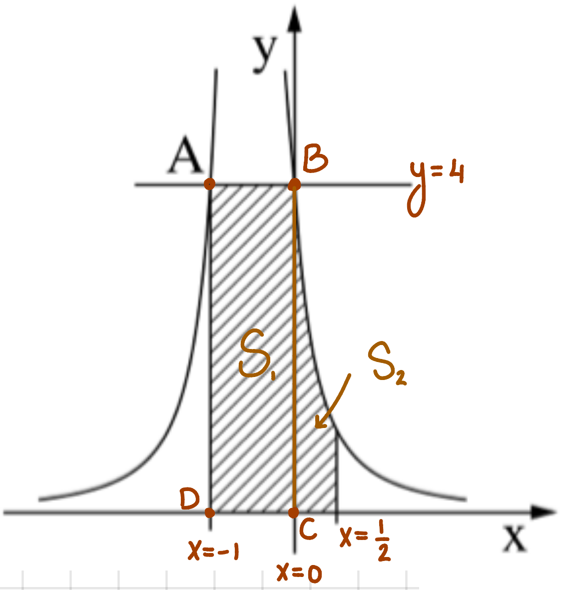
نفحص حسب جدول بحث :

	$60 > x > 0$ ($x=1$)	$x = 60$	$x > 60$ ($x=70$)
f'	$-$	0	$+$
f	↘	MIN	↗

ج. اقل مجموع للضلعين AB و BC :

$$f(x=60) = 60 + 130 + \frac{3600}{60} = 250$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٢ موعد ب - سؤال ٩



9. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البياني

للدالة $f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة. المقام $\neq 0$ م.ت: $x \neq -\frac{1}{2}$

ب. جد خطوط تقارب الدالة، المعامدة للمحورين.

جـ. مرّروا عبر نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة مع

المحور y مستقيمًا يوازي المحور x .

يقطع هذا المستقيم الرسم البياني للدالة في نقطة إضافية، A (انظر الرسم).

(1) جد إحداثيات النقطة A .

(2) مرّروا عبر النقطة A عمودًا على المحور x .

جد المساحة المحصورة بين العمود والمستقيم الموازي والرسم البياني للدالة

والمستقيم $x = \frac{1}{2}$ والمحور x (المساحة المخطّطة في الرسم).

ب. خط تقارب عاموديّ: $x=-\frac{1}{2}$ خط تقارب افقي: $y=0$ (اعلى قوى للمتغيّر بالمقام اكبر من البسط)

ج1. نجد نقطة تقاطع الدالة مع محور y : $f(x=0)=\frac{4}{(2\cdot0+1)^2}=4 \longrightarrow B(0,4)$

A و B لهم نفس الاحداثي y (AB يوازي محور x)، نجد النقطة A :

$$4=\frac{4}{(2x+1)^2}$$
$$4(2x+1)^2=4 \quad \backslash:4$$
$$(2x+1)^2=1$$
$$4x^2+4x+1=1$$
$$4x^2+4x=0$$
$$4x(x+1)=0$$
$$x=0 \quad x=-1 \longrightarrow A(-1,4)$$

ج2.

$$S_1=S_{ABCD}=BC\cdot DC=4\cdot1=4 \text{ وحدة مساحة}$$

$$S_2=\int_0^{0.5} f(x)\,dx=\int_0^{0.5}\frac{4}{(2x+1)^2}\,dx=\left(4\cdot\frac{-1}{(2x+1)^1\cdot2\cdot1}\right)\Big|_0^{0.5}=\left(\frac{-2}{2x+1}\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{-2}{2\cdot0.5+1}-\frac{-2}{2\cdot0+1}=-1--2=1 \text{ وحدة مساحة}$$

$$S_{\text{الخطط}}=S_1+S_2=4+1=5 \text{ وحدة مساحة}$$