بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ١

1. خرجت كريمة وأمجد، كلّ واحد منهما في سيّارته، من المدينة A في نفس الساعة.

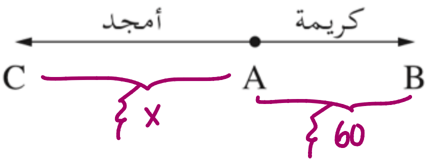
سافرت كريمة من المدينة A إلى المدينة B ،

بينما سافر أمجد من المدينة A إلى المدينة C .

المسافة بين المدينة A والمدينة B هي 60 كم.

كانت سرعة سفر كريمة 1.5 ضعف سرعة سفر أمجد.

كلاهما سافرا كلّ المسافة بسرعة ثابتة.



← نعرّف سرعة امجد v كم/ساعة، اذاً سرعة كريمة 1.5v كم/ساعة.

* عندما وصلت كريمة إلى المدينة B ، قطع أمجد 40% من المسافة التي بين المدينة A والمدينة C .

أ. ما هي المسافة بين المدينة A والمدينة C ؟

ب. وصل أمجد إلى المدينة C بعد ساعة من وصول كريمة إلى المدينة B .
ماذا كانت سرعة سفر أمجد؟

أ.

	سرعة	زمن	مسافة
كريمة A→B	$1.5v$	$\frac{60}{1.5v}$	60
أمجد A→C 40% من الطريق	v	الزمن متساوي $\frac{60}{1.5v}$	$\frac{60}{1.5v}\cdot v = 40$

المسافة هي السرعة • الزمن

من * نستنتج انّ المسافة من A لـ B هو 40% من المسافة من A لـ C (الذي فرضنا انه x).

$$\frac{40}{100}\cdot x = 40$$

$$0.4x = 40 \quad \backslash :0.4$$

$$x = 100$$

ب. كريمة وصلت إلى المدينه B بعد مرور $\frac{60}{1.5v}$ ساعات

⇐ أمجد وصل إلى المدينة بعد مرور $\frac{60}{1.5v}+1$ ساعات

سافر امجد من A ← C 100 كم

مسافة = السرعة · الزمن

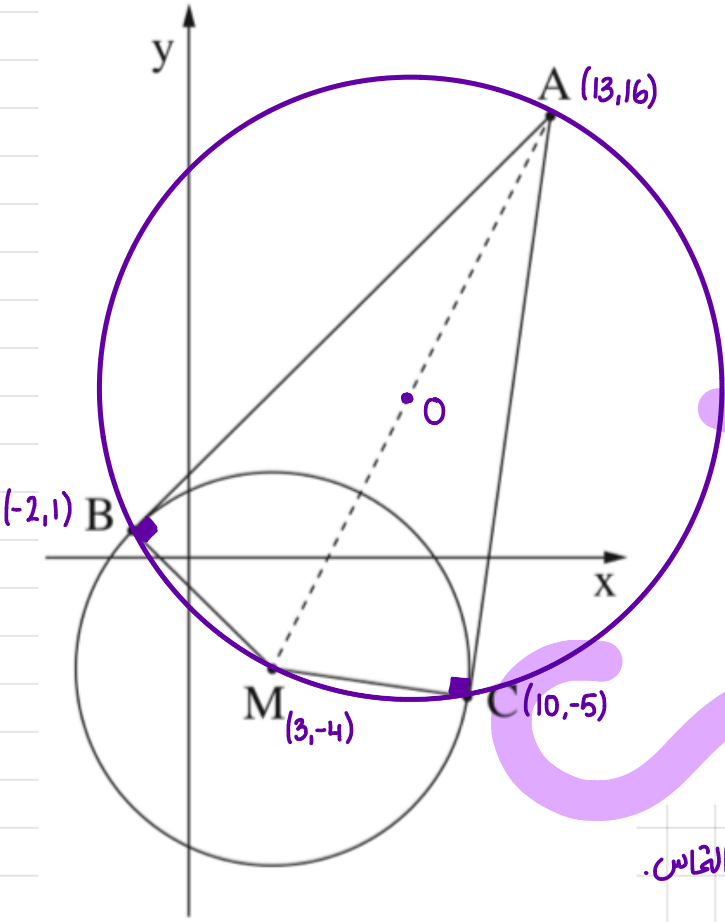
$$\left(\frac{60}{1.5v}+1\right)\cdot v = 100$$

$$\frac{60}{1.5} + v = 100$$

$$40 + v = 100$$

$v = 60$ كم/ساعة

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٢



2. النقطتان $B(-2,1)$ وَ $C(10,-5)$
تقعان على محيط دائرة مركزها $M(3,-4)$.
من النقطة A ، التي خارج الدائرة، تخرج قطعتان
تمسّان الدائرة في النقطتين B وَ C،
كما هو موصوف في الرسم.

أ. (1) جد معادلتَي المستقيمين AB وَ AC .
(2) جد إحداثيّات النقطة A .

ب. (1) جد طول القطعة AM .
(2) جد معادلة الدائرة التي تحصر المثلّث ABM .
(3) هل تقع النقطة C على محيط الدائرة التي وجدتَ معادلتها؟ علّل تحديدك.

أ1. الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها بنقطة التماس.

$\Leftarrow MC \perp CA \qquad MB \perp BA$

$\Leftarrow m_{MC} \cdot m_{CA} = -1 \qquad m_{MB} \cdot m_{BA} = -1$ (ضرب ميولهم -1) $\longleftarrow$

$m_{MB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1--4}{-2-3} = \frac{5}{-5} = -1$

$m_{MC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4--5}{3-10} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$

$-\frac{1}{7} \cdot m_{CA} = -1 \qquad -1 \cdot m_{BA} = -1$

$m_{CA} = 7 \qquad m_{BA} = 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$y = mx + n \quad C(10,-5) \qquad y = mx + n \quad B(-2,1)$

$-5 = 7 \cdot 10 + n \qquad 1 = 1 \cdot (-2) + n$

$n = -75 \qquad n = 3$

$y_{AC} = 7x - 75 \qquad y_{BA} = x + 3 \quad \Leftarrow$

أ2. A هي نقطة التقاء الخطين البيانيين من بند أ1 :

$7x - 75 = x + 3$

$6x = 78 \quad \backslash :6$

$x = 13$

$A(13,16) \Leftarrow \quad y = x + 3 = 13 + 3 = 16$

ب1. قانون البعد : $AM = \sqrt{(13-3)^2 + (16--4)^2} = \sqrt{500} = 22.36$

ب2. الدائرة التي تحصر المثلث ABM , الزاوية $\measuredangle ABM = 90°$, الزاوية المحيطية القائمة تقابل قطر الدائرة $\Leftarrow$ AM قطر

$\leftarrow$ نصف القطر $R = \frac{\sqrt{500}}{2}$

مركز الدائرة هو نقطة وسط القطر AM : $O\left(\frac{3+13}{2}, \frac{-4+16}{2}\right) \leftarrow O(8,6)$

$\Leftarrow$ معادلة الدائرة $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 125$

ب3. نعوّض $C(10,-5)$ بمعادلة الدائرة:

$(10-8)^2 + (-5-6)^2 \overset{?}{=} 125$

$2^2 + (-11)^2 \overset{?}{=} 125$

$125 \overset{\checkmark}{=} 125$

نعم النقطة C تقع على محيط الدائرة بالبند ب2

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٣

يوجد 6 امكانيات $\{1,2,3,4,5,6\}$

احتمال الحصول على عدد

اصغر من 3	اكبر من 3	3
$\{1,2\}$	$\{4,5,6\}$	$\{3\}$
$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$p=\frac{1}{6}$

3. في لعبة حظّ يرمي كلّ لاعب مكعّبًا مرّتين. المكعّب هو مكعّب لعب منتظم.
في كلّ واحدة من الرميتين، إذا كان العدد الذي على المكعّب هو 3 ، يحصل اللاعب على 5 نقاط، وإذا كان العدد أكبر من 3 يحصل اللاعب على 10 نقاط، وإذا كان العدد أصغر من 3 لا يحصل اللاعب على نقاط.

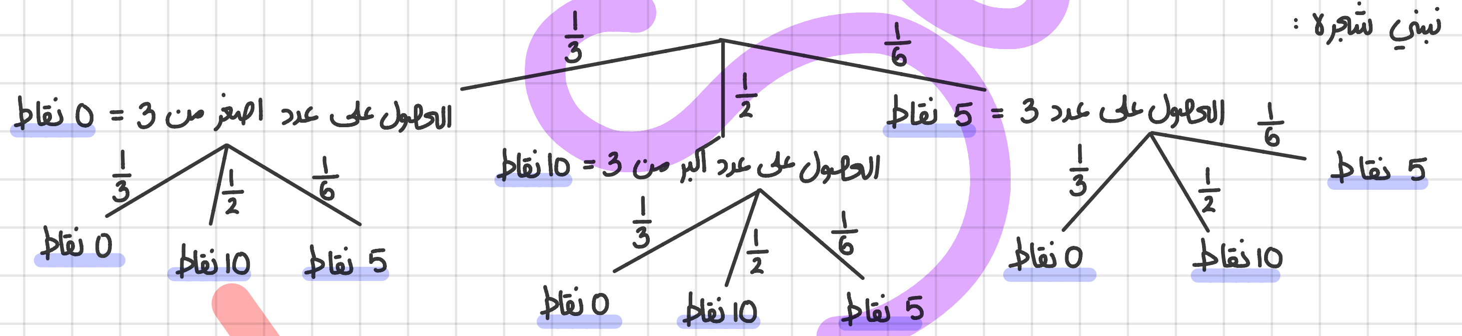
أ. ما هو الاحتمال بأن يُجمِّع اللاعب في هذه اللعبة 15 نقطة على الأقلّ؟

ب. معلوم أنّ أحد اللاعبين جَمَّعَ 15 نقطة على الأقلّ. ما هو الاحتمال بأنّ العدد على المكعّب في الرميتين اللتين رماهما كان أكبر من 3 ؟

احتمال مشروط

جـ. يلعب أربعة لاعبين في هذه اللعبة.
ما هو الاحتمال بأن يُجمِّع بالضبط كلّ واحد من اثنين من اللاعبين 15 نقطة على الأقلّ؟

نبني شجرة :



أ. 15 نقاط على الأقل = 15 نقاط او اكثر = $\{5+10,\ 10+5,\ 10+10\}$

$$\text{الاحتمال} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}=0.41667$$

ب.

A = يجمّع اللاعب 15 نقاط على الأقل ← $P(A)=\frac{5}{12}$ (بند أ)

B = العدد على المكعّب في الرميتين أكبر من 3 (اي جمّع 10 نقاط مرتين)

$B\cap A$ = حصل على 10 نقاط مرتين $P(B\cap A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{3}{5}=0.6$$

ج. تجربة برنولي

$n=4$ لعب 4 لاعبين اللعبة

$k=2$ عدد النجاحات

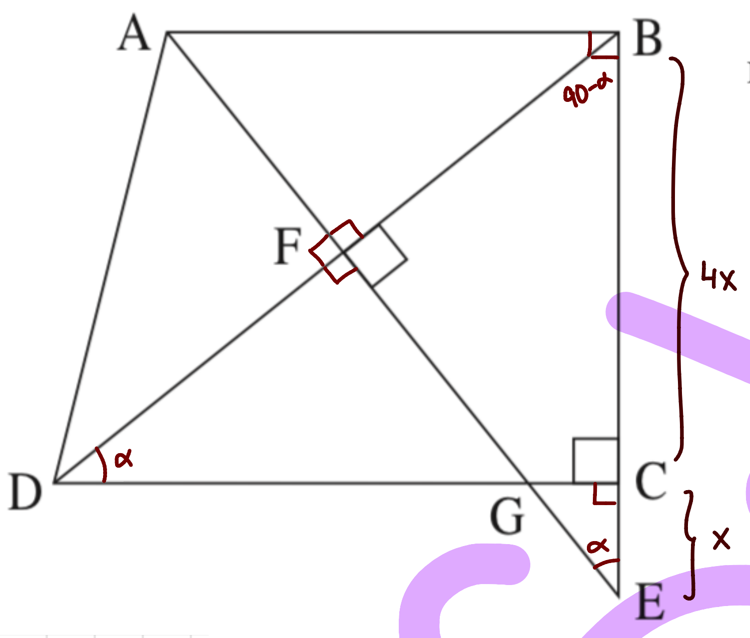
"النجاح" = تجميع 15 نقاط على الأقل

$p=\frac{5}{12}$ احتمال النجاح (بند أ)

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{1225}{3456}=0.3544$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال٤

4. ABCD هو شبه منحرف قائم الزاوية ($AB \parallel DC$ ، $\sphericalangle BCD = 90^o$).
E هي نقطة على امتداد الضلع BC
بحيث تكون القطعة AE معامدة للقطر BD
وتقطعه في النقطة F .
AE يقطع القطعة DC في النقطة G ،
كما هو موصوف في الرسم.



أ. برهن أنّ: $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BDC$.

معطى أنّ: $DC = BE$.

ب. برهن أنّ: $\Delta DCB \cong \Delta EBA$.

معطى أنّ $CB = 4CE$.

جـ. (1) برهن أنّ: $\Delta GCE \sim \Delta ABE$.

(2) جد النسبة $\frac{GC}{AB}$.

أ. نفرض انّ $\measuredangle E=\alpha$ ← $\measuredangle FBE = 90-\alpha^\circ$ (مجموع زوايا المثلث ΔFBE هو 180°)
← $\measuredangle BDC = \alpha^\circ$ (مجموع زوايا المثلث ΔBDC هو 180°)
⇐ $\measuredangle AEB = \measuredangle BDC = \alpha^\circ$
وهو المطلوب

ب. $\Delta DCB \cong \Delta EBA$ حسب ز.ض.ز :
ز. $\measuredangle BDC = \measuredangle AEB = \alpha^\circ$ (بند أ)
ض. $DC = BE$ (معطى)
ز. $\measuredangle DCB = \measuredangle ABE = 90^\circ$
وهو المطلوب

ج1. $\Delta GCE \sim \Delta ABE$ حسب ز.ز :
ز. $90^\circ = \measuredangle B = \measuredangle GCE$
ز. $\measuredangle E$ زاوية مشتركة
وهو المطلوب

ج2. نفرض $CE = x$ ← $BC = 4x$ ← $BE = 5x$

نسب التشابه من بند ج1 : $\frac{GE}{AE} = \underbrace{\frac{CE}{BE} = \frac{GC}{AB}}$

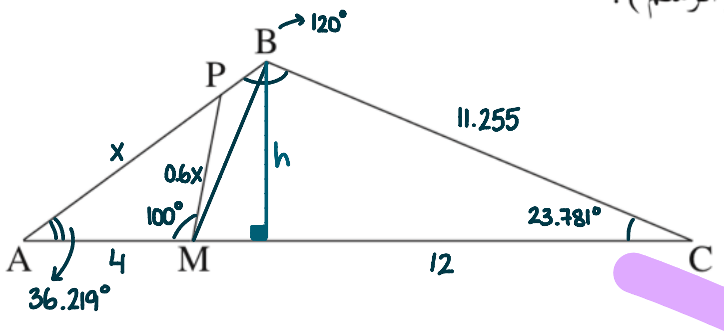
$\frac{GC}{AB} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$

وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٥

5. في المثلّث ABC النقطة P تقع على الضلع AB ،

والنقطة M تقع على الضلع AC (انظر الرسم).



نرمز:

. AP = x

معطى أنّ:

، PM = 0.6x

، $\measuredangle ABC = 120^o$ ، $\measuredangle AMP = 100^o$ ،

AM = 4 سم ، MC = 12 سم .

أ. (1) احسب الزاوية PAM .

(2) احسب طول الضلع BC .

ب. احسب طول القطعة BM .

جـ. جد النسبة بين مساحتَي المثلّثين $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta BMC}}$. علّل إجابتك .

أ1. ΔPAM نظرية sin :

$$\frac{PM}{\sin(\measuredangle PAM)} = \frac{PA}{\sin(\measuredangle PMA)} \leftarrow \frac{0.6x}{\sin(\measuredangle PAM)} = \frac{x}{\sin 100^\circ} \leftarrow \sin(\measuredangle PAM) = \frac{0.6\cancel{x} \cdot \sin 100^\circ}{\cancel{x}}$$

$\measuredangle PAM = 36.219^\circ$

أ2. ΔABC نظرية sin :

$$\frac{AC}{\sin(\measuredangle B)} = \frac{BC}{\sin(\measuredangle A)} \leftarrow \frac{16}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin 36.219^\circ} \leftarrow BC = \frac{16 \cdot \sin 36.219^\circ}{\sin 120^\circ}$$

BC = 10.916 سم

ب. ΔABC مجموع زوايا المثلث 180° $\Leftarrow$ $\measuredangle C = 23.781^\circ$

ΔBMC نظرية cos

$$BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2 \cdot BC \cdot MC \cdot \cos(\measuredangle C)$$

$$BM^2 = 10.916^2 + 12^2 - 2 \cdot 10.916 \cdot 12 \cdot \cos(23.781^\circ)$$

$$BM^2 = 23.419$$

BM = 4.839 سم

ج.

نفرض ان الارتفاع من النقطة B للضلع AC هو h.

$$S_{\Delta BMC} = \frac{h \cdot MC}{2} = \frac{h \cdot 12}{2} = 6h$$

$$S_{\Delta BMA} = \frac{h \cdot AM}{2} = \frac{h \cdot 4}{2} = 2h$$

$$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{2h}{6h} = \frac{1}{3}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٦

6. معطاة الدالّة $f(x)=\frac{2x^2+4}{x^2-a}$. $0<a$ هو پارامتر.

أجب عن البند "أ". عبّر عن إجاباتك بدلالة a حسب الحاجة.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(3) جد خطّ التقارب الأفقيّ للدالّة $f(x)$.

يوجد للدالّة $f(x)$ خطّ تقارب عموديّ $x=1$.

ب. جد a .

اذا عوّضنا $x=1$ جالمقام ينتج 0: $1^2-a=0$
$a=1$

عوِّض a الذي وجدتَه في البند "ب"، وأجب عن البنود "جـ-هـ".

جـ. (1) هل يوجد للدالّة $f(x)$ خطّ تقارب عموديّ إضافيّ؟ إذا كانت إجابتك نعم – ما هو؟ إذا كانت إجابتك لا – علّل.

(2) جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقطة.

(3) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

د. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

هـ. بالنسبة لأيّة قيَم k لا يوجد حلّ للمعادلة $f(x)=k$ ؟ علّل.

أ. (1) مجال تعريف دوال نسبية : المقام $\neq 0$: $x^2-a\neq 0$

$x^2\neq 0 \leftarrow$ $x\neq\sqrt{a},-\sqrt{a}$ م.ت

(2) تقاطع مع محور y : $x=0$: $f(x=0)=\frac{0+4}{0-a}=-\frac{4}{a}$ $\leftarrow$ $(0,-\frac{4}{a})$

تقاطع مع محور x : $y=0$: $\frac{2x^2+4}{x^2-a}=0 \ \backslash\cdot x^2-a$ $\leftarrow$ $2x^2+4=0$

$2x^2=-4$

$\emptyset$ لا يوجد

(3) خط تقارب افقي $y=\frac{2}{1}=2$ (اكبر قوى للمتغيّر x بالبسط والمقام متساوية لذلك نقسم معاملات x^2)

جـ. $\boxed{f(x)=\frac{2x^2+4}{x^2-1}}$

(1) مجال تعريف الدالة : $x\neq\pm 1$

اذا خطوط تقارب عامودية للدالة: $x=1,\ x=-1$

(2) نجد النقاط الحرجة :

$$f'(x)=\frac{(4x)(x^2-1)-2x(2x^2+4)}{(x^2-1)^2}=\frac{\cancel{4x^3}-4x-\cancel{4x^3}-8x}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-12x}{(x^2-1)^2}}=0 \ \backslash\cdot(x^2-1)^2 \longrightarrow -12x=0$$

$x=0$

$f(0)=\frac{0+4}{0-1}=-4$ $(0,-4)$

نرتّب بجدول مجالات مجال التعريف والنقطة الحرجة :

$(0,-4)$ $\qquad x\neq 1,-1$

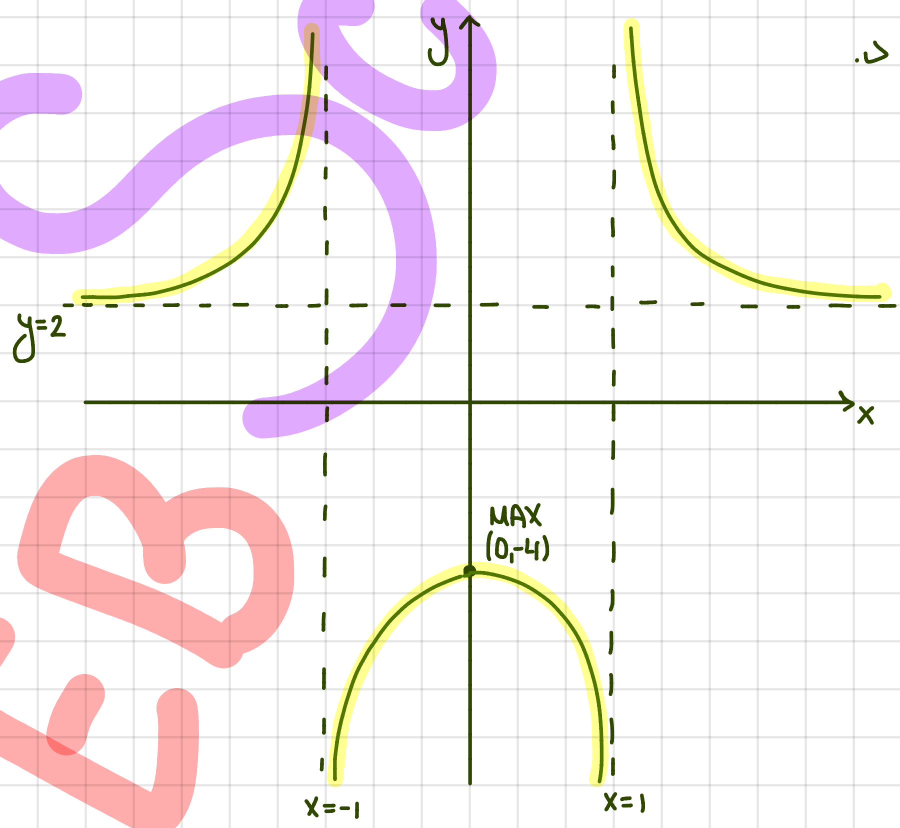
	$x<-1$ $(x=-2)$	$x=-1$	$0>x>-1$ $(x=-0.5)$	$x=0$	$1>x>0$ $(x=0.5)$	$x=1$	$x>1$ $(x=2)$
$f'(x)$	$\frac{8}{+}>0$		$\frac{2}{+}>0$	0	$\frac{-2}{+}<0$		$\frac{-8}{+}<0$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX $(0,-4)$	$\searrow$		$\searrow$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-12x}{(x^2-1)^2}} \longrightarrow$$

يكفي التعويض بالبسط لان المقام دائمًا موجب بسبب وجود التربيع

(3) مجال تصاعدي $x<-1\ ,\ 0>x>-1$ مجال تنازلي $x>1\ ,\ 1>x>0$

د.



هـ. $f(x)=k \Leftarrow y=k$ هو خط مستقيم يوازي محور x.

تقاطع دالتين

لا يوجد حل لـ $f(x)=k$ عندما $-4>k>2$

(يوجد حلين لـ $f(x)=k$ عندما $k>2$ او $k<-4$

يوجد حل واحد لـ $f(x)=k$ عندما $k=-4$)

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٧

7. معطاة الدالّة $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x+16}}$.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(3) جد خطّ التقارب العموديّ للدالّة $f(x)$.

(4) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

(5) ارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة $f(x)$ في المجال $x \le 0$.

معطاة الدالّة $g(x)=f(x)-2$.

ب. (1) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحورين.

(2) ارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالّة $g(x)$ في المجال $x \le 0$.

جـ. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ والمحورين.

أ. (1) $x+16 \neq 0$ وأيضًا $x+16 \ge 0$

$x \neq -16$ وأيضًا $x \ge -16$

$x > -16$

(2) تقاطع الدالة مع محور y

$f(0)=\frac{4}{\sqrt{0+16}}=1 \rightarrow (0,1)$

تقاطع الدالة مع محور x

$\frac{4}{\sqrt{x+16}}=0 \quad / \cdot \sqrt{x+16}$

$4=0$

$\varnothing$ لا يوجد تقاطع مع محور x

(3) المقام $=0$

$\sqrt{x+16}=0$

$x=-16$

(4) $f'(x)=\frac{0\cdot\sqrt{x+16}-\frac{1}{2\sqrt{x+16}}\cdot 4}{x+16} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{\left(\frac{-2}{\sqrt{x+16}}\right)}{x+16}}=0 \quad / x+16$

$\frac{-2}{\sqrt{x+16}}=0 \quad / \cdot\sqrt{x+16}$

$-2=0$

$\varnothing$ لا تتواجد نقاط حرجة/قصوى

$\Leftarrow$

جدول بحث حسب مجال التعريف: $(x=0)$

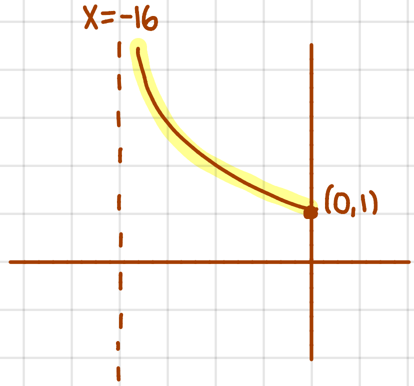
$f'(0)=\frac{\left(\frac{-2}{4}\right)}{16}<0$

$x<-16$	$x=-16$	$x>-16$
		$-$
		$\searrow$

مجال تنازلي $x>-16$

مجال تصاعدي $\varnothing$

(5)



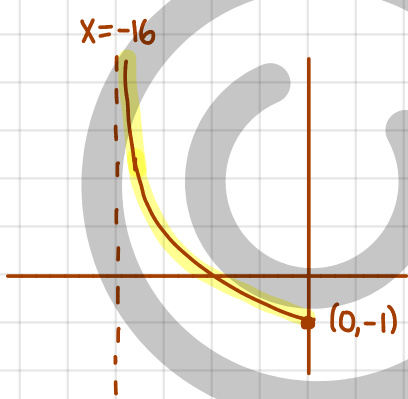
ب. (1) $g(x)=f(x)-2$

تدل على ازاحة عامودية وحدتين إلى الاسفل للدالة $f(x)$.

هذه الإزاحة تؤدي إلى تغيير الحداثي y لكل النقاط على الرسم البياني للدالة $f(x)$.

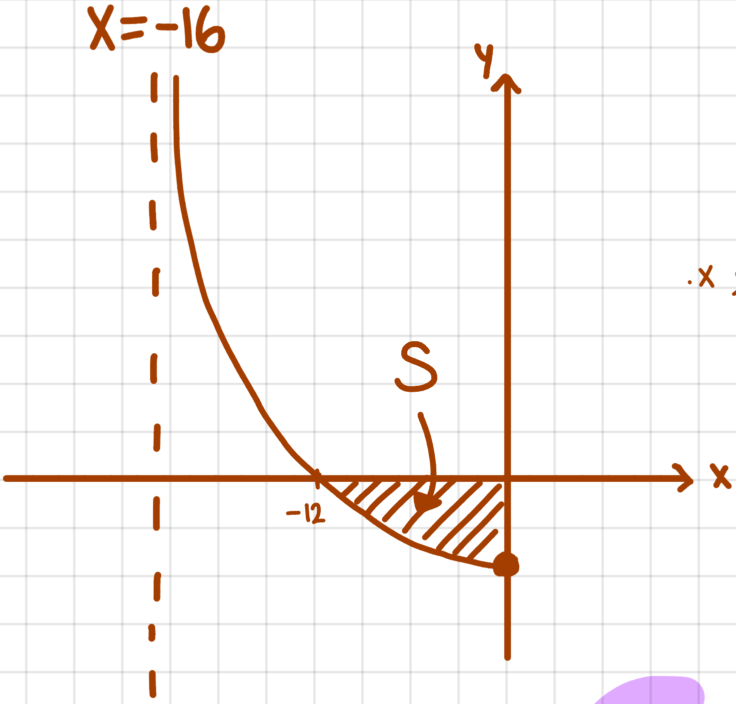
الاحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع محور y هو $(0,1)$ $\Leftarrow$ لـ $g(x)$ هو $(0,1-2)$ اي $(0,-1)$

ب. (2)



ج.

$$g(x) = f(x) - 2$$
$$= \frac{4}{\sqrt{x+16}} - 2$$



* المساحة S محصورة بين $g(x)$ ، محور x ومحور y.

* نجد الداخلي x لنقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $g(x)$ مع محور x.

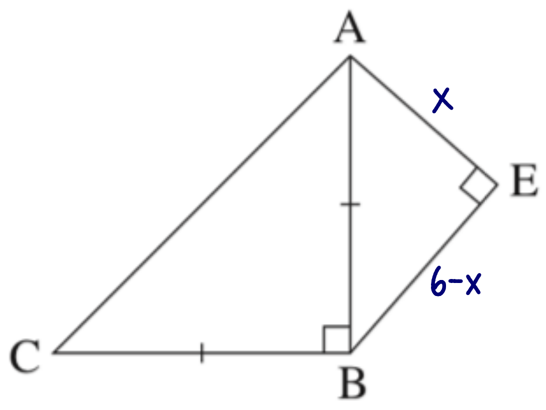
$$0 = \frac{4}{\sqrt{x+16}} - 2$$
$$2 = \frac{4}{\sqrt{x+16}} \Big/^{2}$$
$$4 = \frac{16}{x+16} \Big/ \cdot x+16$$
$$4x + 64 = 16$$
$$4x = -48$$
$$x = -12$$

محور x

$$S = \int_{-12}^{0} (0 - g(x))dx = \int_{-12}^{0} -\left(\frac{4}{\sqrt{x+16}} - 2\right)dx = \int_{-12}^{0} \left(\frac{-4}{\sqrt{x+16}} + 2\right)dx = \left(-4 \cdot 2 \cdot \sqrt{x+16} + 2x\right)\Big|_{-12}^{0}$$

$$= \left(-4 \cdot 2 \cdot \sqrt{16} + 0\right) - \left(-4 \cdot 2 \cdot \sqrt{-12+16} + 2 \cdot (-12)\right)$$
$$= -32 - (-40)$$
$$= 8 \text{ وحدة مساحة}$$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٧ - سؤال ٨



8. ABC هو مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين $(\measuredangle ABC = 90°)$.
بنوا على الضلع AB مثلّثًا قائم الزاوية AEB
بحيث يكون AB الوتر في المثلّث AEB،
كما هو موصوف في الرسم.
معطى أنّ مجموع طولَي الضلعين القائمين
في المثلّث AEB هو 6 سم. إذاً: $EB=6-x$
نرمز إلى طول الضلع AE بـ x .

أ. عبّر بدلالة x عن مساحة المثلّث ABC .

ب. بالنسبة لأيّة قيمة لـِ x تكون مساحة الشكل الرباعيّ $AEBC$ ($S(x)$) أصغر ما يمكن (MIN)؟

أ. ΔABE مثلث قائم، فيثاغورس:

$$AB^2 = AE^2 + EB^2$$
$$AB^2 = x^2 + (6-x)^2$$
$$AB^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2$$
$$AB^2 = 2x^2 - 12x + 36$$
$$AB = \sqrt{2x^2-12x+36}$$

مساحة المثلث ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\left(\sqrt{2x^2-12x+36}\right)^2}{2} = x^2-6x+18$$

ب.

$$S(x) = S_{AEBC} = S_{\Delta ABC} + S_{ABE} = x^2-6x+18 + \frac{x\cdot(6-x)}{2} = x^2-6x+18+\frac{-x^2+6x}{2}$$

الدالة التي تعبّر عن مساحة $AEBC$:

$$S(x) = 0.5x^2-3x+18$$

نجد نقاطها القصوى:

$$S'(x) = x-3 = 0$$
$$x=3$$

نفحص:

$$S''(x) = 1 > 0 \quad \text{MIN} \checkmark$$