بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ١

١. معطى معين ABCD (انظر الرسم).

إحداثيات الرأس A هي (1, 2).

معادلة القطر BD هي $x-2y-2=0$.

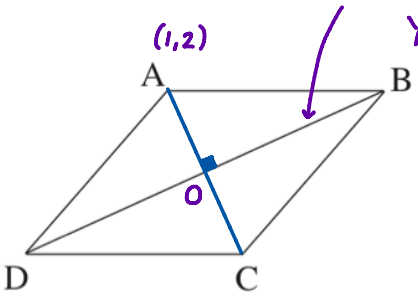
أ. (١) جد معادلة القطر AC.

(٢) جد إحداثيات الرأس C.

ب. طول القطر BD هو $4\sqrt{5}$.

جد طول ضلع المعين.

جـ. جد معادلة المستقيم AB، إذا كان معطى أنّ الرأس B موجود في الربع الأوّل.



$x-2y-2=0$

$x-2=2y \quad \backslash:2$

$y_{BD}=\frac{1}{2}x-1$

أ. (١) استقامة الخطين تتعامد بطرفيها البعدان ⇐ حاصل ضرب ميولهم : -1 ⇐ $m_{AC}\cdot m_{BD}=-1$ ← $m_{AC}=-2$

$y_{AC}=-2x+n$

$2=-2\cdot1+n$ نعوض A(1,2)

$n=4$ ⇒ $y_{AC}=-2x+4$

(2) نجد النقطة O (نقطة تقاطع القطرين):

$y_{AC}=y_{BD}$

$-2x+4=\frac{1}{2}x-1$

$5=2.5x \quad \backslash:2.5$

$x=2$ ← $y=-2\cdot2+4=0$ ⇐ $O(2,0)$

استقامة الخطين تنصّف بعضها البعض: $AO=OC,\ DO=OB$

O نقطة وسط AC. نفرض $C(x,y)$:

$O(2,0)=\left(\frac{1+x}{2},\frac{2+y}{2}\right)$

$\frac{1+x}{2}=2 \quad \frac{2+y}{2}=0$

$1+x=4 \quad 2+y=0$ ⇒ $C(3,-2)$

$x=3 \quad y=-2$

ب. مثلث AOB قائم، فيثاغورس:

$BO=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$AO=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$

$AB^2=AO^2+OB^2$

$AB^2=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=25$

طول ضلع المعين $AB=5$

جـ. B يقع على y_{BD} ⇐ $B(x,\frac{1}{2}x-1)$

$BO=2\sqrt{5}$ $O(2,0)$

$BO=2\sqrt{5}=\sqrt{(x-2)^2+(\frac{1}{2}x-1-0)^2} \quad |^2$

$20=(x-2)^2+(\frac{1}{2}x-1)^2$

$20=x^2-4x+4+\frac{1}{4}x^2-x+1$

$0=\frac{5}{4}x^2-5x-15 \quad \backslash\cdot\frac{4}{5}$

$x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

$x=6,-2$

هو في الربع الأوّل: $x=6$ نجد y: $B(6,6\cdot\frac{1}{2}-1)$

$B(6,2)$

⇒ $A(1,2)$ لهم نفس الـ y ⇒ $y_{AB}=2$

$B(6,2)$ أي AB يوازي محور x

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٣

٣. توجد 3 أوراق لعب داخل كيس. لإحدى الأوراق جهتان بيضاوان، ولإحدى الأوراق جهتان سوداوان، ولإحدى الأوراق جهة بيضاء والجهة الأخرى سوداء.

يخلطون الأوراق، وبأعين مغمضة يُخرِجون ورقة من الكيس ويضعونها على الطاولة.

أ. ما هو الاحتمال بأن تكون جهتا الورقة متطابقتين؟

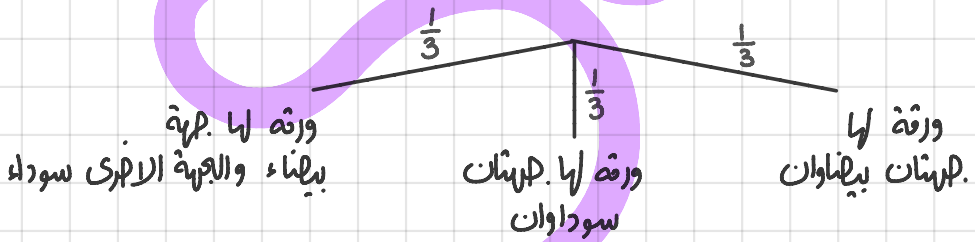
ب. ما هو الاحتمال بأن تكون جهة الورقة البادية للعين بيضاء؟ علّل.

جـ. معلوم أنّ جهة الورقة البادية للعين هي بيضاء.

ما هو الاحتمال بأن تكون جهتا الورقة بيضاوين؟

الاحتمال مشروط

شجرة:

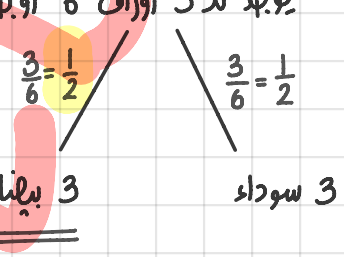


(اخراج الورقة عشوائي، لذلك احتمال اخراج اي ورقة متساوٍ)

أ. جهتا الورق متطابقتين = الجهتان سوداوان أو الجهتان بيضاوان

$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ب. شجرة جديدة:



احتمال الحظوظ: $P = \frac{1}{2}$

جـ. $P(\text{جهة الورقة البادية للعين بيضاء} \mid \text{جهتا الورقة بيضاوين}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

A B

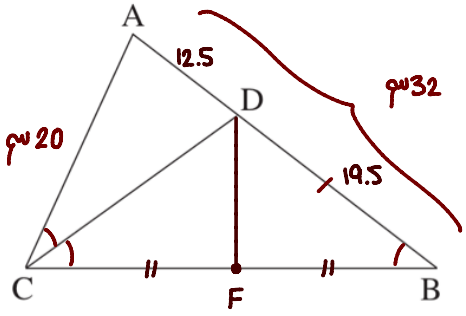
احتمال المشروط

ب ب

IEB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٤

٤. CD هو منصّف الزاوية ACB في المثلث ABC



(انظر الرسم) .

معطى أنّ : $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle ABC$

$AC = 20$ سم

$AB = 32$ سم

أ. (١) برهن أنّ $\Delta ACB \sim \Delta ADC$.

(٢) جد طول القطعة AD .

(٣) جد طول الضلع BC .

ب. النقطة F هي منتصف الضلع BC .

برهن أنّ : $DF \perp BC$.

أ. 1. $\Delta ACB \sim \Delta ADC$ حسب ز.ز ز. $\sphericalangle A$ زاوية مشتركه

ز. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC$ (من المعطى)

وهو المطلوب

أ. 2. نسب التشابه من البند السابق : $\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ نفرض $AD = x$

$\frac{20}{x} = \frac{32}{20} \leftarrow 32 \cdot x = 400 \leftarrow AD = x = 12.5$ سم

وهو المطلوب

أ. 3. من البند السابق : $DB = 19.5$ سم

معطى DC منصّف الزاوية C بالمثلث ΔACB : $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \leftarrow \frac{20}{CB} = \frac{12.5}{19.5}$

$CB = 31.2$ سم ←

وهو المطلوب

ب. ΔCDB مثلث به $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC$ زاويتين متساويتين لذلك هو مثلث متساوي الساقين.

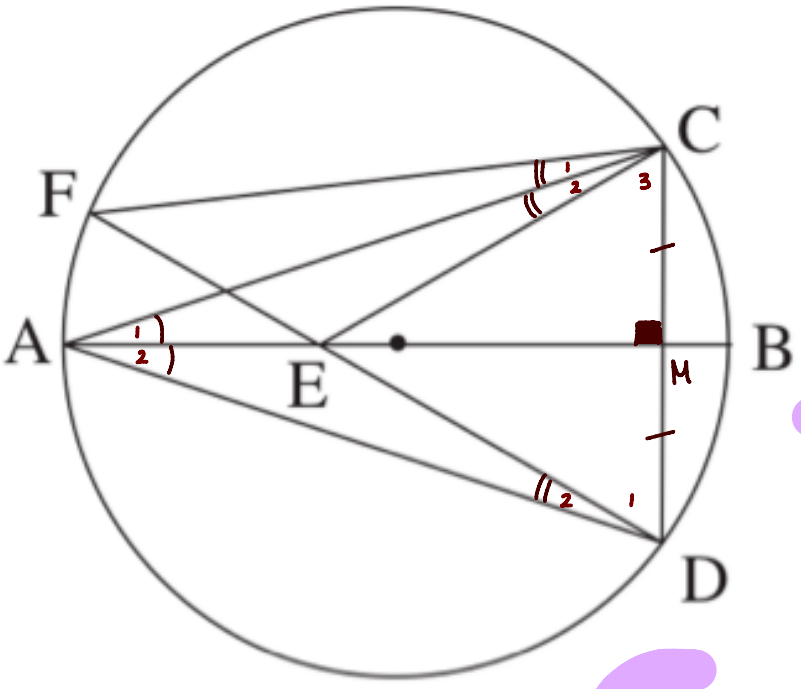
DF متوسط ⇐ DF ارتفاع ⇐ $DF \perp BC$

بمثلث متساوي الساقين الارتفاع للقاعدة والمتوسّط للقاعدة ومنصّف زاوية الرأس هو نفس الضلع.

وهو المطلوب

VBB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٥



٥. المثلثان CAD و CFD محصوران داخل دائرة.

AB هو قطر في هذه الدائرة، وهو يقطع

الضلع FD في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ $AB \perp CD$.

أ. برهن أنّ المثلث CAD هو متساوي الساقين.

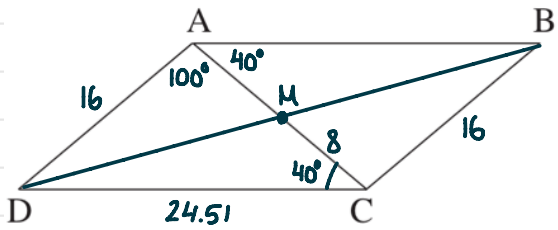
ب. برهن أنّ $\triangle CAE \cong \triangle DAE$.

جـ. برهن أنّ $\sphericalangle ACF = \sphericalangle ACE$.

	إدعاء	شرح
أ.	(1) $CM = MD$	العامود النازل من مركز الدائرة لوتر يوسطها.
	(2) $\triangle CAD$ متساوي الساقين $(AD = AC)$	$\triangle ACD$ مثلث به يتطابق المتوسط والعامود لنفس الضلع لذلك هو متساوي الساقين. وهو المطلوب
ب.	(3) $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$	بمثلث متساوي الساقين $\triangle CAD$ الارتفاع/المتوسط للقاعدة هو ايضاً منصّف زاوية الرأس أو اوتار متساويه $(CB = BD)$ تقابل زوايا محيطيه متساوية $(\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2)$.
	(4) $\triangle CAE \cong \triangle DAE$ حسب ض.ز.ض	ض. AE ضلع مشترك ز. $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ ض. $AD = AC$ (ادعاء 2) وهو المطلوب
جـ.	(5) $\sphericalangle D_2 = \sphericalangle C_2$	من التطابق بادعاء 4
	(6) $\sphericalangle D_2 = \sphericalangle C_1$	زوايا محيطيه تقابل نفس القوس $\overline{AF}$ هم متساويه
	(7) $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$	ادعاء 6 + 5 وهو المطلوب.

IES School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٦



٦. في متوازي الأضلاع ABCD (انظر الرسم)

معطى أنّ: $AC = AD = 16$ سم

$\sphericalangle BAD = 140^\circ$

أ. (١) احسب طول الضلع DC.

(٢) احسب طول القطر DB.

ب. AE هو الارتفاع على DB في المثلث ABD.

جد طول AE.

أ. * ABCD متوازي الأضلاع لذلك كل زوج اضلاع متقابله متوازية ومتساوية $AD=BC=16$ سم
كل زوج زوايا متقابله متساوية وكل زوج زوايا متجاورة مجموعهم 180°

$\sphericalangle A=\sphericalangle C=140^\circ$ ⇐
$\sphericalangle B=\sphericalangle D=40^\circ$

* ΔADC متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACD=40^\circ$
مجموع زوايا المثلث 180° ← $\sphericalangle CAB=40^\circ$, $\sphericalangle DAC=100^\circ$

(1) ΔADC نظرية cos :

$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2\cdot AD\cdot AC\cdot \cos(\sphericalangle ADC)$
$= 16^2 + 16^2 - 2\cdot 16\cdot 16\cdot \cos 100$

$DC = 24.51$ سم ←

(2) ABCD متوازي الاضلاع، لذلك اقطاره تنصّف بعضها البعض $AM=MC=8$ سم , $DM=MB$

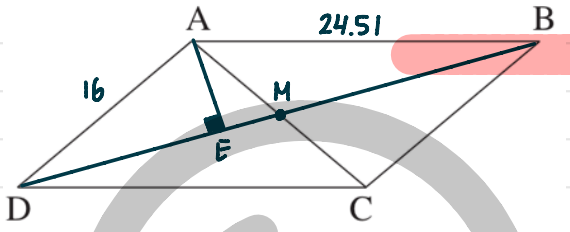
ΔDMB نظرية cos :

$DM^2 = MC^2 + DC^2 - 2\cdot MC\cdot DC\cdot \cos(\sphericalangle MCD)$
$= 8^2 + 24.51^2 - 2\cdot 8\cdot 24.51\cdot \cos 40^\circ$

$DM = 19.08$ سم ←

↓

$DB = 38.17$ سم



ب. نحسب مساحة ΔADB بطريقتين

$\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot \sin(\sphericalangle A) = \frac{AE\cdot BD}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 24.51\cdot \sin 140^\circ = \frac{AE\cdot 38.17}{2}$

$AE = 6.6$ سم

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٧

٧. معطاة الدالة $f(x)=\frac{ax^2+2x+16}{bx^2-8x+16}$ ، a وَ b هما بارامتران.

مجال تعريف الدالة هو $x\neq 4$.

أ. جد قيمة b.

ب. عوّض قيمة b التي وجدتَها في البند "أ"، وأجب عن البندين الفرعيين (١) وَ (٢).

(١) عبّر بدلالة a عن خطّ تقارب الدالة الموازي للمحور x. خط تقارب افقي

(٢) خطّ تقارب الدالة الموازي للمحور x والرسم البياني للدالة يتقاطعان في نقطة على المحور y. جد قيمة a.

جـ. عوّض أيضًا قيمة a التي وجدتَها في البند الفرعي ب (٢)، وأجب عن البنود الفرعية

(١) وَ (٢) وَ (٣).

(١) جد إحداثيات النقاط القصوى للدالة (إذا وُجدت كهذه).

(٢) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالة. علّل.

(٣) ارسم رسمًا تخطيطيًا للرسم البياني للدالة.

أ. مجال التعريف لدالة نسبيه هو (المقام $\neq 0$)، اي تعويض $x=4$ بالمقام ينتج 0.

$b\cdot 4^2-8\cdot 4+16=0$

$16b-16=0$

$16b=16$

$b=1$

ب (١) $f(x)=\frac{ax^2+2x+16}{x^2-8x+16}$ القوى للمتغير بالبسط والمقام متساوية لذا نقسم معاملات الـ x^2

$y=\frac{a}{1}=a$

(٢) التقاطع للدالة $f(x)$ وخط التقارب الافقي $y=a$ هو في نقطة على المحور y $(x=0)$

$\frac{ax^2+2x+16}{x^2-8x+16}=a \xleftarrow{x=0} \frac{a\cdot 0^2+2\cdot 0+16}{0^2-8\cdot 0+16}=a \leftarrow a=1$

الخط التقارب الافقي للدالة $y=1$.

جـ. $f(x)=\frac{x^2+2x+16}{x^2-8x+16}$

(١) نجد النقاط الحرجة:

$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-8x+16)-(2x-8)(x^2+2x+16)}{(x^2-8x+16)^2}$

$=\frac{2x^3+2x^2-16x^2-16x+32x+32-(2x^3+4x^2+32x-8x^2-16x-128)}{(x^2-8x+16)^2}$

$f'(x)=\frac{-10x^2+160}{(x^2-8x+16)^2}=0 \quad \backslash\cdot(x^2-8x+16)^2 \Rightarrow -10x^2+160=0$

$10x^2=160$

$x^2=16$

$x=4,-4 \rightarrow (-4,\frac{3}{8})$

$f(-4)=\frac{(-4)^2+2\cdot(-4)+16}{(-4)^2-8\cdot(-4)+16}$

$x=4$ ملغي لانه ليس بمجال التعريف

$(-4, \frac{3}{8})$ $x \neq 4$

نبني جدول بحث, نضع به المجالات x لمجال التعريف والنقاط الحرجة:

	(x=-5) $x<-4$	$x=-4$	(x=0) $4>x>-4$	$x=4$	(x=5) $x>4$
$f'(x)$	$\frac{-90}{+}<0$	0	$\frac{160}{+}>0$		$\frac{-90}{+}<0$
$f(x)$	↘	MIN $(-4, \frac{3}{8})$	↗		↘

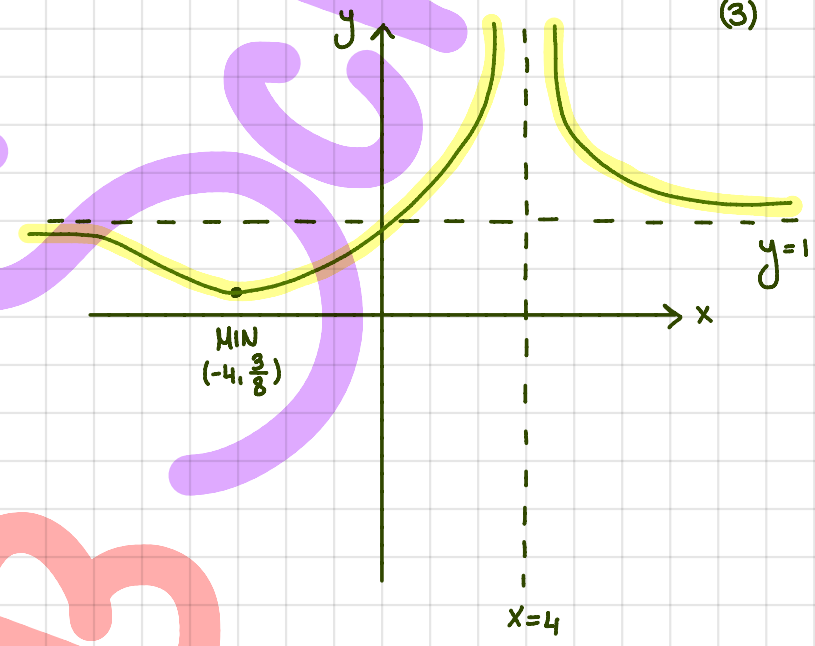
$$f'(x)=\frac{-10x^2+160}{(x^2-8x+16)^2}$$

المقام دائماً موجب لذلك نعوّض فقط بالبسط

(2) مجال تصاعدي $4>x>-4$

مجال تنازلي $x<-4$, $x>4$

(3)



© VEB School

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - شتاء ٢٠١٠ - سؤال ٩

٩. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة.

ب. جد على الرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطة، حاصل ضرب إحداثيّها الـ x بإحداثيّها الـ y هو أصغر ما يمكن.

الدالة التي نريد تكوينها — MIN

جـ. معطاة الدالة $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

استعِن بإجابتيك عن البند "أ" وعن البند "ب"، وارسم رسمًا تخطيطيًا للرسم البياني للدالة $g(x)$.

أ. الدالة نسبية وفيها جذر، م.ت: المقام > 0

$x-1 > 0$

$x > 1$

ب. كل نقطة على الرسم البياني للدالة $f(x)$ احداثياتها: $\left(x, \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

نكوّن الدالة المطلوبة: $h(x)$ = حاصل ضرب الداخل x و $f(x)$ للدالة $= x \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

نجد متى الدالة اصغر ما يمكن، اي نقطة الـ MIN:

$$h'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 \cdot x}{x-1} = 0 \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = 0 \quad \Big| \cdot 2\sqrt{x-1}$$

$2(x-1) - x = 0$

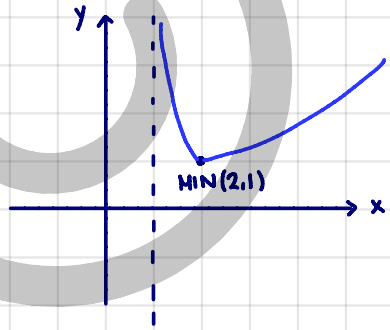
$2x - 2 - x = 0$

$x = 2$ نقطة حرجة

نبني جدول بحث لنتأكّد ان بال $x=2$ الدالة اصغر ما يمكن:

	$1<x<2$ (x=1.5)	$x=2$	$x>2$ (x=3)
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	MIN	↗

النقطة المطلوبة: $(2,1)$ $\Rightarrow f(2) = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$



ج. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ هي الدالة التي رسمناها بالبند ب.

م.ت $x > 1$

MIN(2,1)