بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ١

1. معطى مستطيل عرضه x سم، وطوله 1.2 ضعف عرضه. $1.2x$

كَبَّروا طول المستطيل بِـ 10% ، وصَغَّروا عرض المستطيل بِـ 10% . تَكَوَّنَ مستطيل جديد .

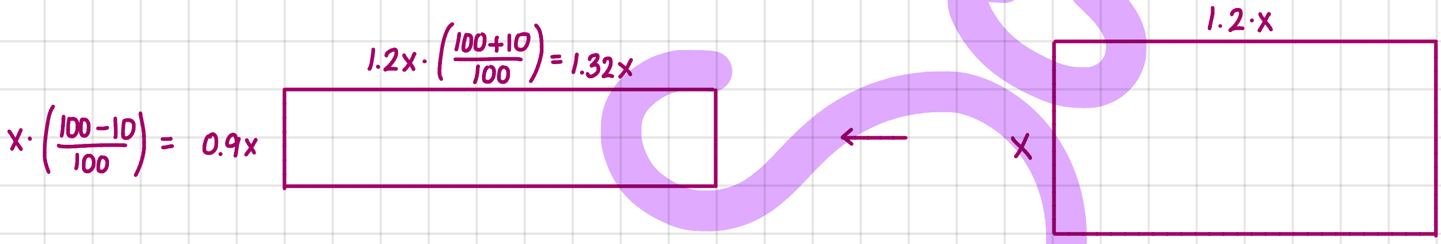
أ. (1) عبِّر بدلالة x عن مساحة المستطيل الجديد .

(2) ما هي النسبة المئويّة التي تغيّرت بها مساحة المستطيل المعطى؟

ب. R هو نصف قطر الدائرة التي تحصر المستطيل المعطى.

معطى أنّ $R = \sqrt{61}$ سم .

جد مساحة المستطيل الجديد .



أ. (1) $0.9x \cdot 1.32x = 1.188x^2$

(2) مساحة المستطيل بالبداية : $1.2x^2$

مساحة المستطيل بالنهاية : $1.188x^2$

$y\%\downarrow$

$$1.2x^2\cdot\left(\frac{100-y}{100}\right) = 1.188x^2 \quad \backslash : x^2 \quad x\neq 0$$

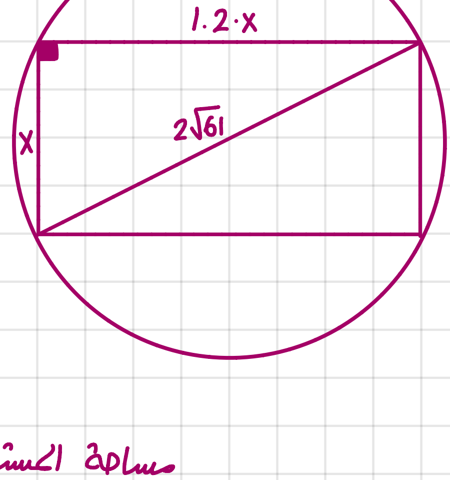
$$1.2\cdot\left(\frac{100-y}{100}\right) = 1.188 \quad \backslash : 1.2$$

$$\frac{100-y}{100} = 0.99 \quad \backslash \cdot 100$$

$$100-y = 99$$

$$y = 1\%$$

ب.



نمد احدى اقطار المستطيل. كل زوايا المستطيل 90°.

بالدائرة الزاوية المحيطية القائمة تقابل قطر الدائرة = $2R = 2\sqrt{61}$

نجد x عن طريق فيثاغورس :

$$x^2 + (1.2x)^2 = (2\sqrt{61})^2$$

$$2.44x^2 = 244 \quad \backslash : 2.44$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

مساحة المستطيل الجديد $1.188x^2 = 1.188\cdot 10^2 = 118.8$ سم²

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٢

2. معطى أنّ الدائرة التي معادلتها $(x-3)^2+(y+k)^2=25$ ، تمرّ عبر نقطة أصل المحاور. (0,0)

k هو بارامتر.

أ. (1) جد قيمتَي k.

(2) اكتب معادلتَي الدائرتين اللتين تلائمان قيمتَي k اللتين وجدتَهما.

ب. جد نقاط تقاطُع كلّ واحدة من الدائرتين مع المحورين.

جـ. ارسم الدائرتين في هيئة محاور واحدة.

د. المستقيم $x=a$ يمسّ الدائرتين، $a>0$.

(1) جد a.

(2) ما هي إحداثيّات نقطتَي التماسّ؟

أ. (1) (0,0) على محيط الدائرة، نعوّض النقطة ونجد k:

$(0-3)^2+(0+k)^2=25$

$9+k^2=25$

$k^2=16 \leftarrow k=\pm 4$

(2) $k=4 \rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$

$k=-4 \rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$

ب. الدائرة $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

تقاطع مع x $(y=0)$:

$(x-3)^2+\overbrace{(0+4)^2}^{16}=25$

$(x-3)^2=9$

$x-3=3$ ، $x-3=-3$

$x=6$ ، $x=0$

$(6,0)$ ، $(0,0)$

تقاطع مع y $(x=0)$:

$\overbrace{(0-3)^2}^{9}+(y+4)^2=25$

$(y+4)^2=16$

$y+4=4$ ، $y+4=-4$

$y=0$ ، $y=-8$

$(0,0)$ ، $(0,-8)$

الدائرة $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

تقاطع مع x $(y=0)$:

$(x-3)^2+\overbrace{(0-4)^2}^{16}=25$

$(x-3)^2=9$

$x-3=3$ ، $x-3=-3$

$x=6$ ، $x=0$

$(6,0)$ ، $(0,0)$

تقاطع مع y $(x=0)$:

$\overbrace{(0-3)^2}^{9}+(y-4)^2=25$

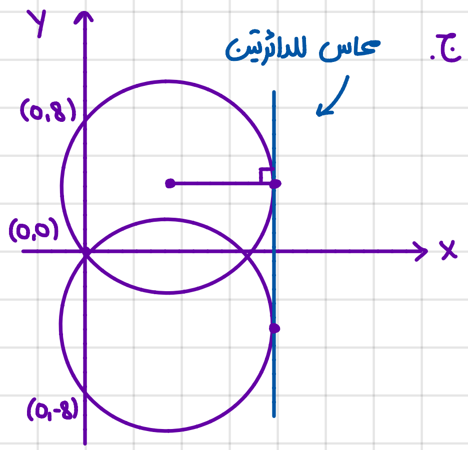
$(y-4)^2=16$

$y-4=4$ ، $y-4=-4$

$y=8$ ، $y=0$

$(0,8)$ ، $(0,0)$

جـ. مماس للدائرتين



د. (1)+(2) $x=a$ مستقيم يوازي محور y

الخط النازل من مركز الدائرة للمماس يعامدها بنقطة التماس.

حسب الرسمة مركز الدائرة التي فوق: (3,4) ونصف قطرها 5.

نصف القطر يوازي محور x (لأن $x=a$ يوازي محور y).

أي البعد بين مركز الدائرة ونقطة التماس هو 5.

⇐ نقطة التماس: (8,4) ⇐ $a=8$

نعوّض $x=8$ بمعادلة الدائرة الثانية لإيجاد نقطة التماس:

$\overbrace{(8-3)^2}^{25}+(y+4)^2=25$

$(y+4)^2=0 \rightarrow y=-4 \rightarrow (8,-4)$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٣

3. في العلبة I توجد 3 كرات حمراء وَ 6 كرات خضراء.

في العلبة II توجد 12 كرة حمراء وَ 4 كرات خضراء.

نختار علبة بشكل عشوائيّ، ونُخرِج منها كرتَيْن الواحدة تلو الأخرى (بدون إعادة).

اي احتمال اختيار كل علبة : $\frac{1}{2}$

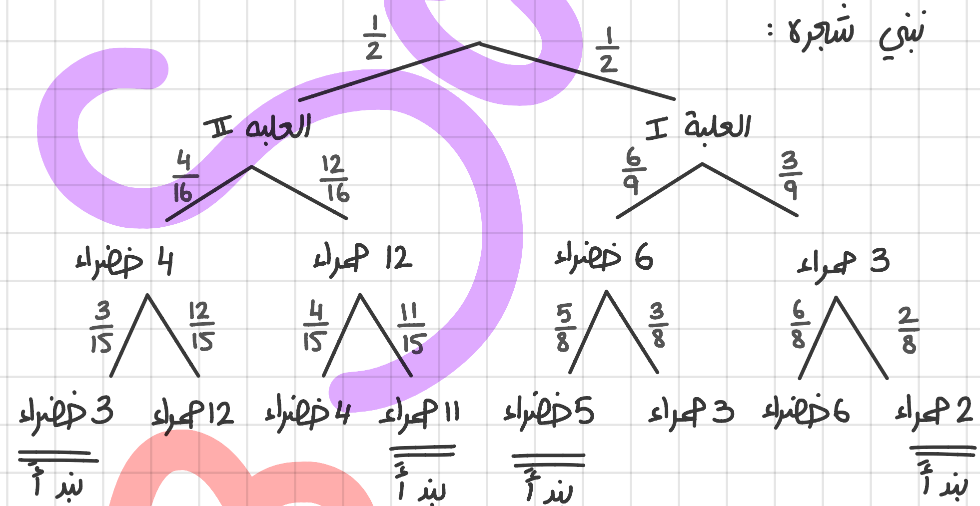
أ. ما هو الاحتمال بأن تكون الكرتان بنفس اللون؟

ب. ما هو الاحتمال بأن تكون الكرتان بلونين مختلفين؟

جـ. معلوم أنّ الكرتين كانتا بنفس اللون.

ما هو الاحتمال بأن تكونا قد أُخرجتا من العلبة I ؟

نبني شجرة :



أ. A اخراج كراتان بنفس اللون

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}=0.55$$

ب. اختيار كرتان بلونين مختلفين ⟵ $\bar{A}$ عدم اختيار كرتان بنفس اللون

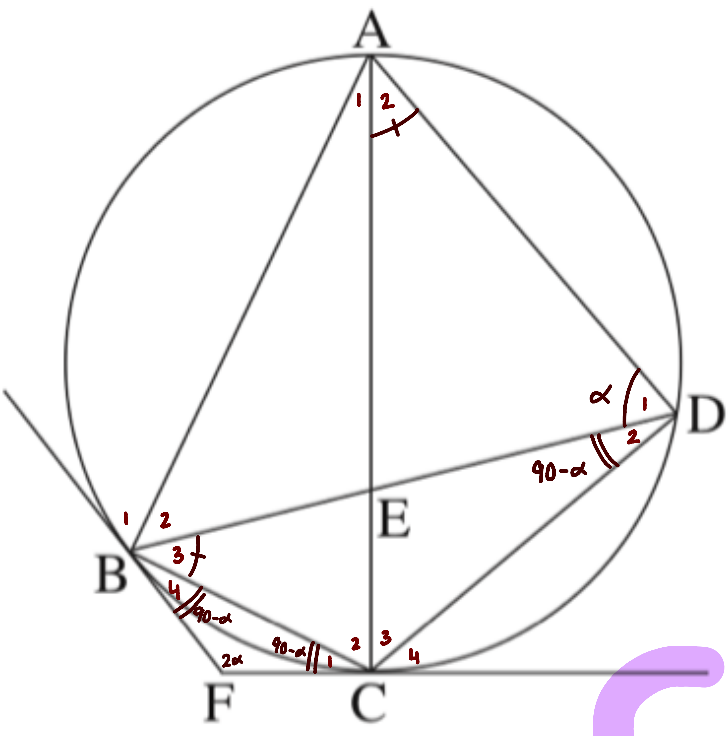
$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.55=0.45$$

ج. احتمال مشروط

$$P\left(\text{أخرجنا كرتين من العلبة I}\;\middle|\;\text{الكرتين بنفس اللون}\right)=\frac{P\left(\text{الكرتين بنفس اللون ومن العلبة I}\right)}{P\left(\text{الكرتين بنفس اللون}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}}{0.55}=\frac{5}{11}=0.454$$

من بند أ

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٤



4. الشكل الرباعيّ ABCD محصور في دائرة.
قطرا الشكل الرباعيّ يلتقيان في النقطة E .
مرّروا مماسًّا للدائرة في النقطة B
ومماسًّا للدائرة في النقطة C .
يلتقي المماسّان في النقطة F (انظر الرسم).
معطى أنّ: $\measuredangle ABC = 90^{o}$

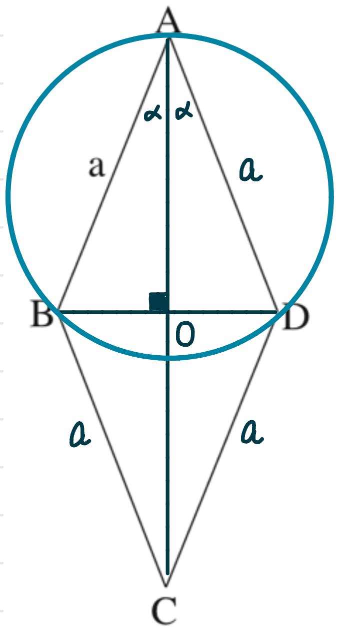
أ. (1) برهن أنّ: $\measuredangle ADB + \measuredangle FBC = 90^{o}$.
(2) برهن أنّ: $\measuredangle BFC = 2 \cdot \measuredangle ADB$.

ب. (1) برهن أنّ: $\triangle BEC \sim \triangle AED$.
(2) معطى أيضًا أنّ: $BE \cdot DE = 21$ ، $AE = 7$.
جد قطر الدائرة.

ملاحظة: حلّ البند "ب" لا يتعلّق بحلّ البند "أ".

	إدعاء	شرح
أ1 (1)	$\measuredangle B_4 = \measuredangle D_2$	الزاوية المحيطيه المحصوره بين مماس ووتر تساوي الزاوية المحيطيه المقابله للوتر
(2)	$\measuredangle D_{12} = \measuredangle B_{23} = 90^\circ$	في شكل رباعي محصور بدائرة , مجموع كل زوج زوايا متقابله 180° + معطى $\measuredangle B_{12} = 90^\circ$
(3)	$\measuredangle D_1 + \measuredangle B_4 = 90^\circ$	ادعاء 2+1 — وهو المطلوب
أ2 (4)	$BF = FC$	المماسات الخارجات من نفس النقطة للدائرة , متساويات
(5)	$\measuredangle B_4 = \measuredangle C_1 = 90-\alpha$	$\measuredangle D_1 = \alpha$ فرضيه $\leftarrow$ $\measuredangle B_4 = 90-\alpha$ (ادعاء 3) $\triangle BCF$ متساوي الساقين لذلك زوايا القاعدة متساوية
(6)	$\measuredangle F = 2\measuredangle D_1 = 2\alpha$	$\triangle BCF$ مجموع زوايا المثلث 180° — وهو المطلوب
ب1 (7)	$\triangle BEC \sim \triangle AED$ حسب ز.ز	ز. $\measuredangle BEC = \measuredangle AED$ زوايا متقابله بالرأس متساوية ز. $\measuredangle B_3 = \measuredangle A_2$ زوايا محيطيه تقابل نفس الوتر (CD) هم متساوية — وهو المطلوب
ب2 (8)	$EC = 3$ سم	نسب التشابه: $\frac{BE}{AE} = \frac{EC}{ED} = \frac{BC}{AD}$ $BE \cdot ED = AE \cdot EC$ $21 = 7 \cdot EC$
(9)	$AC = 10$ سم قطر الدائرة	زاويه محيطيه قائمه $\measuredangle D = 90^\circ$ تقابل قطر الدائرة + ادعاء 8 — وهو المطلوب

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٥



كل اضلاعه متساوية

5. في المعيَّن ABCD الذي ضلعه a (انظر الرسم)

معطى أنّ: $\sphericalangle BAD = 2\alpha$ ، $\sphericalangle BAD < 90^o$.

أ. (1) عبِّر عن AC وعن BD بدلالة a وَ α .

(2) معطى أيضًا أنّ: $AC \cdot BD = a^2$.

جد α .

ب. معطى أيضًا أنّ نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABD هو 10 سم.

جد مساحة المعيَّن ABCD (قيمة عدديّة).

أ. (1) بالمعين ABCD كل اضلاعه متساوية, كل زوج زوايا متقابله متساوية وكل زوج زوايا متجاوره مجموعها 180°. اقطاره تنصّف بعضها البعض, تعامد بعضها البعض وتنصّف زوايا الشكل.

$\sphericalangle BAO = \sphericalangle OAD = \alpha$

* $\triangle AOB$ $\quad \sin\alpha = \frac{BO}{a} \quad \cos\alpha = \frac{AO}{a} \ \backslash \cdot a$

$BO = a\sin\alpha \quad AO = a\cdot\cos\alpha$

$AC = 2AO = 2a\cos\alpha \longleftarrow$

$BD = 2BO = 2a\sin\alpha$

(2) $AC\cdot BD = (2a\cdot\cos\alpha)(2a\cdot\sin\alpha) = a^2$

$4a^2\cdot\cos\alpha\sin\alpha = a^2$

$2\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha = 1 \quad \backslash :2$

$\sin(2\alpha) = 0.5$

$2\alpha = 30^\circ$

$\alpha = 15^\circ$

ب. نظرية sin بالمثلث $\triangle ABD$: $\frac{BD}{\sin\sphericalangle A} = 2R$

$\frac{2a\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\cdot 10 \quad \backslash \cdot\sin 30^\circ$

$2a\sin 15^\circ = 20\cdot\sin 30^\circ \quad \backslash : 2\cdot\sin 15^\circ$

$a = \frac{20\sin 30^\circ}{2\sin 15^\circ} = 19.318$

$\Leftarrow$ $AC = 2\cdot 19.31\cdot\sin 15^\circ = 9.99$ سم

$BD = 2\cdot 19.31\cdot\cos 15^\circ = 37.3$ سم

$S_{ABCD} = \frac{AC\cdot BD}{2} = 186.31$ سم²

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٦

6. معطاة الدالّة $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2}$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة.

ب. جد خطوط تقارب الدالّة، الموازية للمحورين.

جـ. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

د. جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة، وحدّد نوع هذه النقطة.

هـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة.

و. معطى أنّ الدالّة $g(x)$ تحقّق: $g'(x) = f(x)$.

($g'(x)$ و $g(x)$ معرّفتان في نفس المجال.)

مرّروا مماسّين للرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ موازيَيْن للمحور x.

ما هما الإحداثيّان x لنقطتَي تماسّ هذين المماسّين؟ علّل.

أ. $x \neq 0$

ب.

خط تقارب عامودي: $x=0$ (عكس مجال التعريف)

خط تقارب افقي: $y=\frac{-1}{1}=-1$ (أكبر قوى لل x بالمقام والبسط متساوي)

ج. تقاطع مع محور y: لا يوجد لان $x \neq 0$

تقاطع مع محور x

$$f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}=0 \quad \backslash \cdot x^2$$

$$-x^2+2x+3=0 \quad \backslash \cdot(-1)$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=3,-1$$

$(3,0)$ $(-1,0)$

د. نشتق الدالة:

$$f'(x)=\frac{(-2x+2)x^2-2x(-x^2+2x+3)}{x^4}=\frac{-2x^3+2x^2+2x^3-4x^2-6x}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x^2-6x}{x^4}}=0 \quad \backslash \cdot x^4 \rightarrow -2x^2-6x=0$$

$$-2x(x+3)=0$$

$x=0$ $x=-3$

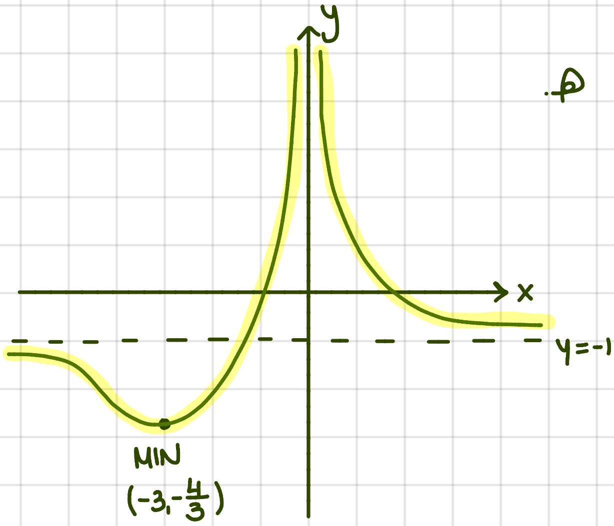
ملغي, ليس بالمجال

$$f(-3)=\frac{-(-3)^2+2(-3)+3}{(-3)^2}=-\frac{4}{3}$$

نرتّب مجال التعريف والنقطه الحرجه بجدول بحث/معالات:

	$x<-3$ $(x=-4)$	$x=-3$	$0>x>-3$ $(x=-1)$	$x=0$	$x>0$ $(x=1)$
$f'(x)$	$\frac{-8}{256}<0$	0	$\frac{4}{1}>0$		$\frac{-8}{1}<0$
$f(x)$	↘	MIN $(-3,-\frac{4}{3})$	↗		↘

هـ.



و.

* معطى $g'(x)=f(x) \leftarrow g'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}$

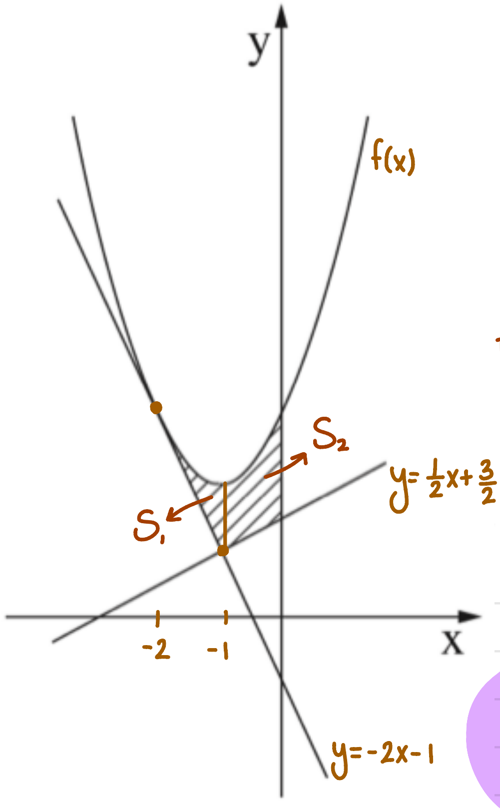
* مماس يوازي محور x ← ميله 0 ← $g'(x)=0$

$$g'(x)=\underbrace{f(x)=0}_{\text{تقاطع}}$$

تقاطع مع محور x

نستنتج ← $x=3,\ x=-1$

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٧



$f'(x)=2x+a$

.7 معطاة الدالّة $f(x)=x^2+ax+b$. a وَ b هما بارامتران.

المستقيم $y=-2x-1$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة

في النقطة التي فيها $x=-2$ (انظر الرسم).

أ. جد قيمة a وقيمة b.

عوِّض: $a=2$ وَ $b=3$ ، وأجب عن البند "ب". ← $f(x)=x^2+2x+3$

ب. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$

والمماسّ والمستقيم $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ والمحور y

(المساحة المخطّطة في الرسم).

أ. * المستقيم يمس الرسم البياني للدالة في النقطة $x=-2$

⇐ مشتقة الدالة عندما $x=-2$ يساوي ميل المستقيم $m=-2$

$(-2=f'(x=-2))$

⇐ $-2=2\cdot(-2)+a$

$-2=-4+a$

$a=2$ ← $f(x)=x^2+2x+b$

* الدالة $f(x)$ تتقاطع مع المستقيم عندما $x=-2$ $(f(x=-2)=y_{x=-2})$

$(-2)^2+2\cdot(-2)+b=-2\cdot(-2)-1$

$b=3$

ب. نجد احداثي x تقاطع المستقيمان: $\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=0.5x+1.5 \end{cases}$ ← $-2x-1=0.5x+1.5$

$-2.5=2.5x$

$x=-1$

$S_{المخطط}=S_1+S_2$

$$S_1=\int_{-2}^{-1}(f(x)-(y=-2x-1))dx=\int_{-2}^{-1}(x^2+2x+3-(-2x-1))dx=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Big|_{-2}^{-1}=\left(\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}+2\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)\right)$$

$$=-\frac{7}{3}+\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{0} \left(f(x) - (y = 0.5x + 1.5)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 3 - (0.5x + 1.5)\right) dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + 1.5x + 1.5)\, dx$$

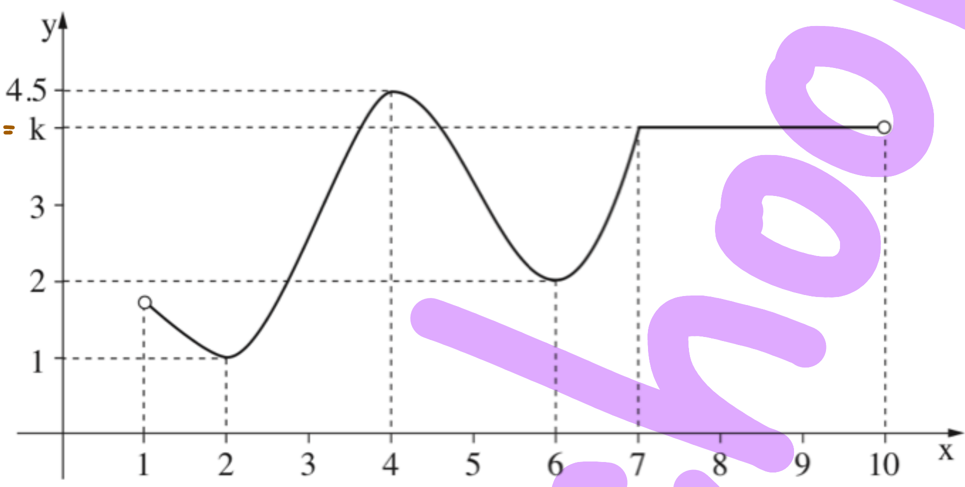
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 1.5 \cdot \frac{x^2}{2} + 1.5x\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \left(\frac{0^3}{3} + 1.5 \cdot \frac{0^2}{2} + 1.5 \cdot 0\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 1.5 \cdot \frac{(-1)^2}{2} + 1.5 \cdot (-1)\right)$$

$$= 0 - -\frac{13}{12} = \frac{13}{12}$$

[illegible] $S = \frac{1}{3} + \frac{13}{12} = 1\frac{5}{12} = 1.4167$ [illegible] [illegible]

بجروت ٤ وحدات رياضيات - نموذج ٨٠٤ - صيف ٢٠١٥ - سؤال ٨

8. يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال $1 < x < 10$.



* تذكير!
$f(x)$ تصاعدي = $f'(x)$ موجب
$f(x)$ تنازلي = $f'(x)$ سالب
نقطة حرجه = $f'(x)=0$

اعتمد على الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$ وعلى القيَم المسجَّلة على المحورين، وأجب عن البنود "أ"، "ب"، "جـ"، "د" .

أ. جد بالنسبة لأيّة قيَم x لا تساوي 7 ، يتحقّق:

(1) $f'(x) < 0$. علّل. مشتقة سالبه = الدالة تنازلية ← $2>x>1$ أو $6>x>4$

(2) $f'(x) > 0$. علّل. مشتقة موجبه = الدالة تصاعدية ← $4>x>2$ أو $7>x>6$

(3) $f'(x) = 0$. علّل. مشتقة صفر ← $10>x>7$ أو $x=2,4,6$

ب. معطى أنّ: $\int_7^9 k\,dx = 8$ ، k هو البارامتر المشار إليه على المحور y في الرسم.

جد قيمة الدالّة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x = 9$.

جـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $2 \le x \le 6$.

د. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x ، في المجال $2 \le x \le 4$ (قيمة عدديّة).

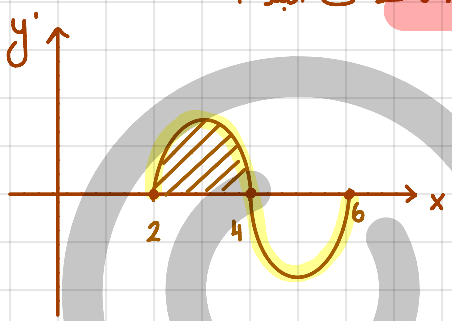
ب. معطى:

$$\int_7^9 k\,dx = (kx)\Big|_7^9 = 9k - 7k = 2k = 8$$

$k=4$

$\rightarrow f(x=9) = k = 4$

ج. نعتمد على البند أ



د.

$$S = \int_2^4 f'(x)\,dx = \left(f(x)\right)\Big|_2^4 = f(4) - f(2) = 4.5 - 1 = 3.5$$ وحدة مساحة