מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ג

מספר השאלון: **035806, 316**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה והסתברות $16\frac{2}{3}\times2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה במישור $16\frac{2}{3}\times2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי $16\frac{2}{3}\times2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2013

رقم النّموذج: **035806، 316**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج ثلاثة فصول.

الفصل الأوّل: الجبر والاحتمال $16\frac{2}{3}\times2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثّاني: الهندسة وحساب المثلّثات في المستوى $2\times16\frac{2}{3}$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثالث: حساب التّفاضل والتّكامل $16\frac{2}{3}\times2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع — 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين. استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

يعمل العامل I والعامل II في مصنع لإنتاج قطع الغيار.

ينفّذ العاملان معًا عملاً معيّنًا.

وتيرة العمل العاديّة للعامل I تختلف عن وتيرة العمل العاديّة للعامل II.

إذا زاد كلّ واحد من العاملَيْن وتيرة عمله العاديّة بـ 50% ، يكون الفرق بين زمن عمل العاملَيْن معًا بالوتيرة العاديّة وبين زمن عملهما معًا بالوتيرة المَزيدَة $\frac{2}{15}$ من الزمن الذي يحتاجه العامل I لتنفيذ العمل بمفرده بوتيرة عمله العاديّة.

أ. جد النسبة بين الزمن الذي ينفّذ فيه العامل I العمل بمفرده وبين الزمن الذي ينفّذ فيه العامل II هذا العمل بمفرده.

ب. العمل الذي ينفّذه العاملان معًا هو تحضير 300 قطعة غيار.

نفّذ العاملان معًا هذا العمل بوتيرة عملهما العاديّة في 6 أيّام.

كم قطعة غيار في اليوم يحضّر العامل I بمفرده بوتيرة عمله العاديّة؟

إجابة السؤال 1

أ.

	زمن العمل (أيّام)	وتيرة العمل $(\frac{1}{\text{يوم}})$	العمل الكلّيّ
العامل I : بالوتيرة العاديّة	x	$\frac{1}{x}$	1
بالوتيرة المَزيدة	$\frac{x}{1.5}$	$\frac{1.5}{x}$	1
العامل II: بالوتيرة العاديّة	y	$\frac{1}{y}$	1
بالوتيرة المَزيدة	$\frac{y}{1.5}$	$\frac{1.5}{y}$	1
العامل I والعامل II معًا: بالوتيرة العاديّة	t	$\frac{1}{t}$	1
بالوتيرة المَزيدة	T	$\frac{1}{T}$	1

/يتبع في صفحة 3/

تكملة إجابة السؤال 1.

I. $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{xy}{y+x}$

II. $\frac{1.5}{x}\cdot T+\frac{1.5}{y}\cdot T=1 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{xy}{1.5(y+x)}$

III. $t-T=\frac{2}{15}x$

من I وَ II وَ III ينتج:

$$\frac{xy}{y+x}-\frac{xy}{1.5(y+x)}=\frac{2}{15}x$$

$$\Downarrow$$

بعد القسمة على x ($x \neq 0$):

$$\frac{x}{y}=1.5$$

ب.

I. $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$

II. $\frac{x}{y}=1.5$

من I وَ II ينتج: x = 15 يومًا

العامل I يحضّر 300 قطعة غيار في 15 يومًا،

لذلك يحضّر العامل I في يوم واحد: $\frac{300}{15}=$ 20 قطعة غيار

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 2

معطاة المتوالية a_n . مجموع n الحدود الأولى في المتوالية هو :

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)]$$

أ. جد معادلة للحدّ العامّ a_n في المتوالية المعطاة.

ب. ننظر إلى حدود المتوالية المعطاة، التي قيمة كلّ واحد منها أصغر من 102 .

احسب أكبر قيمة يمكن أن تنتج بالنسبة لمجموع معيّن لمثل هذه الحدود (ليس بالضرورة مجموع كلّ الحدود) .

إجابة السؤال 2

أ. المجموع $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)$
هو مجموع n حدود في المتوالية الحسابيّة
التي فرقها 4 وحدّها الأوّل 2 ، لذلك :

$$S_n = n^2 - 5n + \frac{n}{2}(2 \cdot 2 + 4(n-1)) = 3n^2 - 5n$$
$$\Downarrow$$

بالنسبة لِـ $n > 1$ يتحقّق :

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 5(n-1)$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$a_n = 6n - 8$$

نفحص إذا كانت المعادلة $a_n = 6n - 8$
صحيحة أيضًا بالنسبة لِـ $n = 1$:

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -2 \quad , \quad 6n - 8 = 6 \cdot 1 - 8 = -2$$
$$\Downarrow$$

المعادلة $a_n = 6n - 8$ صحيحة لكلّ n

/يتبع في صفحة 5/

تكملة إجابة السؤال 2 .

ب .

$$a_n < 102$$
$$\Downarrow$$
$$6n - 8 < 102$$
$$\Downarrow$$
$$n < 18\frac{1}{3}$$
$$\Downarrow$$

عدد الحدود الأصغر من 102 : $n = 18$

عدد الحدود السالبة : $a_n < 0$

$$\Downarrow$$
$$n < \frac{8}{6}$$
$$\Downarrow$$
$$n = 1$$

الحدّ السالب الوحيد هو : $a_1 = 6 - 8 = -2$

لذلك أكبر قيمة للمجموع هي : $a_2 + a_3 + ... + a_{18} = S_{18} - a_1 = 3 \cdot 18^2 - 5 \cdot 18 + 2 = 884$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3

اللجنة المنظِّمة لمسابقة "وُلد للغناء" تتخبّط إذا كان سيحكم في المسابقة الحَكَم "أ" فقط أم سينضمّ إليه حَكَمان آخران: الحَكَم "ب" والحَكَم "جـ".

تصويت الحَكَم "أ" لن يتغيّر إذا حَكَمَ بمفرده أو إذا حَكَمَ مع الحَكَمَيْن الآخرَيْن.

تصويت كلّ واحد من الحُكّام لا يتعلّق بتصويت الحَكَمَيْن الآخرَيْن.

إذا حَكَمَ في المسابقة الحَكَم "أ" فقط – ينتقل المتسابِق إلى مرحلة إضافيّة في المسابقة إذا صوّت الحَكَم لصالحه.

إذا حَكَمَ الحُكّام الثلاثة – ينتقل المتسابِق إلى مرحلة إضافيّة في المسابقة إذا صوّت لصالحه على الأقلّ اثنان من الحُكّام.

يوسف هو أحد المتسابِقين في المسابقة. معطى أنّ الاحتمال بأن يصوّت الحَكَم "أ" لصالح يوسف يساوي الاحتمال بأن يصوّت الحَكَم "ب" لصالحه. الاحتمال بأن يصوّت الحَكَم "جـ" لصالح يوسف هو 0.5 .

أ. هل الاحتمال بأن ينتقل يوسف إلى مرحلة إضافيّة في المسابقة إذا حَكَمَ في المسابقة الحَكَم "أ" فقط، يساوي الاحتمال بأن ينتقل يوسف إلى مرحلة إضافيّة في المسابقة إذا حَكَمَ الحُكّام الثلاثة في المسابقة؟ علّل.

ب. تَقَرَّرَ في النهاية أن يحكم في المسابقة الحُكّام الثلاثة.

معطى أنّ الاحتمال بأن يكون الحَكَم "أ" قد صوّت لصالح يوسف إذا عُلم أنّ يوسف انتقل إلى مرحلة إضافيّة في المسابقة، هو أكبر من 0.8 .

جد مجال قيَم الاحتمال بأن يكون الحَكَم "أ" قد صوّت لصالح يوسف.

إجابة السؤال 3

أ. حسب المعطى: $P(\text{"أ" مع}) = P(\text{"ب" مع}) = x \quad , \quad P(\text{"جـ" مع}) = 0.5$

$$P(\text{على الأقلّ 2 مع}) = P(\text{"أ" مع} \cap \text{"ب" مع} \cap \text{"جـ" مع}) + P(\text{"أ" مع} \cap \text{"ب" ضدّ} \cap \text{"جـ" مع}) + P(\text{"أ" ضدّ} \cap \text{"ب" مع} \cap \text{"جـ" مع}) +$$

$$+ P(\text{"أ" مع} \cap \text{"ب" مع} \cap \text{"جـ" ضدّ})$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{على الأقلّ 2 مع}) = x \cdot x \cdot 0.5 + x \cdot (1-x) \cdot 0.5 + (1-x) \cdot x \cdot 0.5 + x \cdot x \cdot 0.5$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{على الأقلّ 2 مع}) = x$$

$$\Downarrow$$

$$P(\text{على الأقلّ 2 مع}) = P(\text{"أ" مع})$$

/يتبع في صفحة 7/

تكملة إجابة السؤال 3.

ب.

$$P\left(\text{مع "أ"} \,/\, \text{على الأقلّ 2 مع}\right) = \frac{P(\text{مع "أ"} \cap \text{مع "ب"} \cap \text{مع "جـ"}) + P(\text{مع "أ"} \cap \text{ضدّ "ب"} \cap \text{مع "جـ"}) + P(\text{مع "أ"} \cap \text{مع "ب"} \cap \text{ضدّ "جـ"})}{P(\text{على الأقلّ 2 مع})}$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\text{مع "أ"} \,/\, \text{على الأقلّ 2 مع}\right) = \frac{x \cdot x \cdot 0.5 + x(1-x) \cdot 0.5 + x \cdot x \cdot 0.5}{x} > 0.8$$

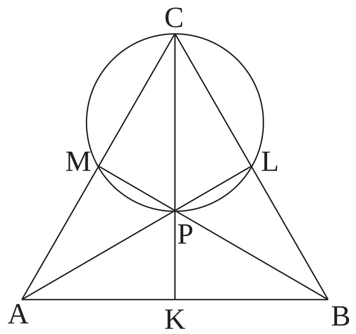
$$\Downarrow$$

$$x > 0.6$$

المجموع: $0.6 < x \le 1$

/يتبع في صفحة 8/

السؤال 4



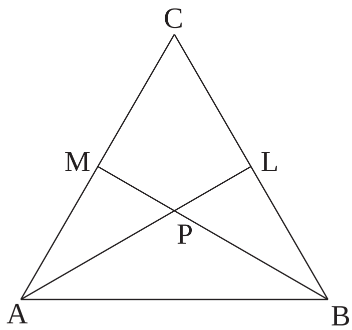
أ . برهن أنّه إذا كان في المثلّث مستقيمان متوسّطان متساويان، يكون المثلّث متساوي الساقين.

ب . في المثلّث ABC ، النقاط L وَ M وَ K هي منتصفات الأضلاع CB وَ CA وَ AB بالتلاؤم.
النقطة P هي نقطة التقاء المستقيمات المتوسّطة في المثلّث، ومعطى أنّها تتواجد على محيط الدائرة التي تمرّ عبر النقاط L وَ M وَ C (انظر الرسم).
معطى أيضًا أنّ $AL = BM$.
(1) برهن أنّ $BM \perp AC$.
(2) برهن أنّ $AK = AM$.

إجابة السؤال 4

أ . معطى أنّ : $AM = \frac{1}{2}AC \quad , \quad BL = \frac{1}{2}BC \quad , \quad AL = BM$

يجب برهان : $AC = BC$



البرهان :

نقطة التقاطع بين المستقيمين المتوسّطين تقسم كلّ مستقيم متوسّط بنسبة 1:2 $\begin{cases} AP = \frac{2}{3}AL \quad , \quad BP = \frac{2}{3}BM \\ PL = \frac{1}{3}AL \quad , \quad PM = \frac{1}{3}BM \end{cases}$

حسب المعطى : $AL = BM$

لذلك : $AP = BP$ ، $PL = PM$

$\sphericalangle APM = \sphericalangle BPL$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان

لذلك : $\Delta APM \cong \Delta BPL$ حسب ض.ز.ض

$\Downarrow$

$AM = BL$ في المثلّثين المتطابقين مقابل الزوايا المتساوية أضلاع متساوية

حسب المعطى : $AM = \frac{1}{2}AC$ ، $BL = \frac{1}{2}BC$

$\Downarrow$

$AC = BC$

/يتبع في صفحة 9/

تكملة إجابة السؤال 4.

ب .(1)

الطريقة I

$AC = BC$ حسب البند "أ"، إذا كان المستقيمان المتوسّطان متساويين عندها المثلّث هو متساوي الساقين.

$\Downarrow$

$MC = LC$ M وَ L هما منتصفا الساقين في مثلّث متساوي الساقين.

CK هو مستقيم متوسّط للقاعدة في المثلّث المتساوي الساقين — K منتصف BC

$\Downarrow$

CK ينصّف $\sphericalangle ACB$

$\Downarrow$

CP هو ارتفاع ومستقيم متوسّط في المثلّث المتساوي الساقين CML

$\Downarrow$

CP هو قطر في الدائرة التي تحصر ΔCML — مركز الدائرة الحاصرة يقع على العمود المتوسّط في المثلّث.

$\Downarrow$

$PM \perp MC$ الزاوية المحيطيّة التي تستند على القطر هي 90^o .

الطريقة II

$AC = BC$ إذا كان المستقيمان المتوسّطان متساويين، عندها المثلّث هو متساوي الساقين.

$\Downarrow$

$MC = LC$ M وَ L هما منتصفا الساقين في مثلّث متساوي الساقين

$PL = PM$ بيّنّا في البند "أ"

CP ضلع مشترك

$\Downarrow$

$\triangle CMP \cong \triangle CLP$ حسب ض.ض.ض

$\Downarrow$

I. $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CLP$ في المثلّثين المتطابقين مقابل الأضلاع المتساوية زوايا متساوية.

II. $\sphericalangle CMP + \sphericalangle CLP = 180^o$ مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعيّ المحصور داخل دائرة هو 180^o .

من I وَ II ينتج: $\sphericalangle CMP = 90^o$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 4.

(2) حسب "ب (1)" : BM مستقيم متوسّط وارتفاع على الضلع AC

$\Downarrow$

AB = BC

إذا كان الارتفاع في المثلّث مستقيمًا متوسّطًا، عندها يكون المثلّث متساوي الساقين.

حسب "ب (1)" : AC = BC

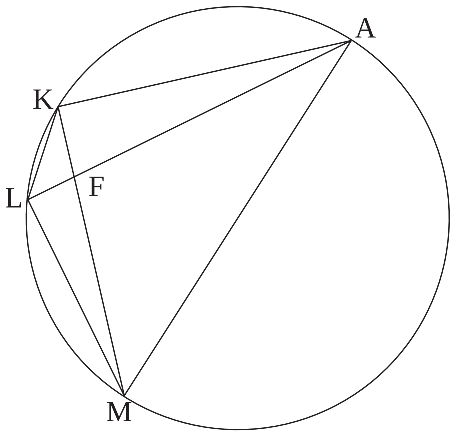
لذلك : AC = AB

حسب المعطى : $AK = \frac{1}{2}AB \quad , \quad AM = \frac{1}{2}AC$

لذلك : AK = AM

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 5



الشكل الرباعيّ AKLM محصور داخل دائرة. AM هو قطر الدائرة.
قطرا الشكل الرباعيّ يلتقيان في النقطة F (انظر الرسم).
معطى أنّ: $ML = 30$ سم ، $FL = a$ سم
مساحة المثلّث ALK هي ثُلث مساحة المثلّث ALM .

أ. جد طول الارتفاع على الضلع LA في المثلّث ALK .

ب. عبّر بدلالة a عن طول القطعة KF .

جـ. برهن أنّ $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

د. معطى أيضًا أنّ: $AF = 42.5$ سم ، $ML > a$.
جد a .

إجابة السؤال 5

أ. $\sphericalangle ALM = 90^{o}$ زاوية محيطيّة تستند على قطر

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ALM} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 30$$

حسب المعطى: $S_{\Delta ALK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ALM}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot AL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 30$$ (h — ارتفاع على الضلع LA)

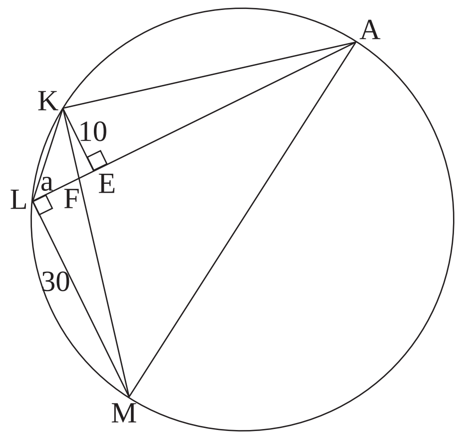
$$\Downarrow$$

$h = 10$ سم

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب.



$\sphericalangle LFM = \sphericalangle EFK$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان

$\sphericalangle KEF = \sphericalangle MLF = 90^o$

$\Downarrow$

$\Delta LFM \sim \Delta EFK$ حسب ز.ز.

$\Downarrow$

$$\frac{10}{FE} = \frac{30}{a} \quad \Rightarrow \quad FE = \frac{a}{3}$$

حسب فيثاغورس في المثلّث EFK : $KF = \sqrt{(\frac{a}{3})^2 + 10^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 900}$

جـ. $\sphericalangle LFK = \sphericalangle MFA$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان

$\sphericalangle LKF = \sphericalangle FAM$ زاويتان محيطيّتان تستندان على نفس القوس

$\Downarrow$

$\Delta LFK \sim \Delta MFA$ حسب ز.ز.

د. من التشابه الذي في البند "جـ" ينتج: I. $\frac{KF}{a} = \frac{AF}{FM}$

حسب البند "ب": II. $KF = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 900}$

حسب فيثاغورس في المثلّث LFM : III. $FM = \sqrt{a^2 + 30^2}$

حسب المعطى: IV. AF = 42.5 سم

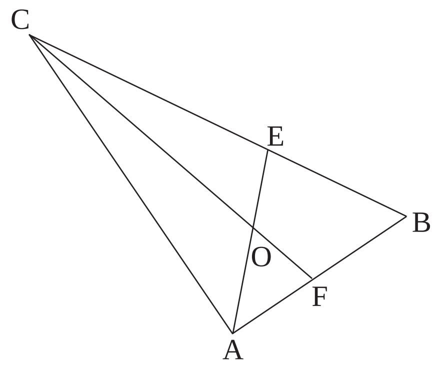
من I وَ II وَ III وَ IV ينتج: $a^2 - 127.5a + 900 = 0$

$\Downarrow$

a = 7.5 سم

/يتبع في صفحة 13/

السؤال 6



النقطة O هي مركز الدائرة المحصورة داخل المثلّث ABC .

امتداد AO يقطع الضلع BC في النقطة E .

امتداد CO يقطع الضلع AB في النقطة F (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = \alpha$ ، $\sphericalangle ABC = \beta$.

أ. عبّر بدلالة α وَ β عن النسبة $\frac{AE}{CF}$.

ب. معطى أيضًا أنّ: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^o$.

بيّن أنّ نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ACB يساوي $\frac{1}{2}BC$.

إجابة السؤال 6

أ.

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE = \frac{\alpha}{2}$$

مركز الدائرة المحصورة في مثلّث يقع على منصّف الزاوية

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = 90^o - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

حسب قانون الجيب
في المثلّث CAE :

$$\frac{CA}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} = \frac{AE}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{CA\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

حسب قانون الجيب
في المثلّث CFA:

$$\frac{CF}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin(\beta+90^o-\frac{\alpha+\beta}{2})} \quad \Rightarrow \quad CF = \frac{CA\sin\alpha}{\sin(90^o+\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

من هنا :

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\sin\alpha}$$

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة إجابة السؤال 6.

ب. حسب المعطيات:

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(\alpha + 60^o) \cdot \cos(30^o - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2} + 60^o) \cdot \sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

بما أنّ:

$\sin(\frac{\alpha}{2} + 60^o) = \cos\left[90^o - \left(\frac{\alpha}{2} + 60^o\right)\right]$:

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(\alpha + 60^o) \cdot \cos(30^o - \frac{\alpha}{2})}{\cos(30^o - \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(\alpha + 60^o)}{\sin\alpha}$$

بعد فتح $\sin(\alpha + 60^o)$

$$\Downarrow$$

ينتج:

$$\sin\alpha = 2\sin 60^o \cos\alpha + 2\cos 60^o \sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 90^o$$

$$\Downarrow$$

BC قطر في الدائرة التي تحصر المثلّث ABC

$$\Downarrow$$

نصف القطر $= \frac{1}{2}BC$

/ يتبع في صفحة 15 /

السؤال 7

معطاة الدالّة $g(x) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$ في المجال $0 \le x \le \frac{7}{3}\pi$.

أ. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحورين.

ب. جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = \sin x$.

جـ. النقطة A تتواجد على الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$، والنقطة B تتواجد على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ بحيث تكون القطعة AB موازية للمحور y .

(1) جد أكبر طول ممكن للقطعة AB .

(2) كم قطعة مثل AB ، التي طولها أكبر ما يمكن، تنتج في المجال المعطى؟ علّل.

إجابة السؤال 7

أ. نقطة التقاطع مع المحور y:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

نقاط التقاطع مع المحور x :

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} - x = \pi k \quad (\text{صحيح } k)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - \pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$(\frac{2\pi}{3}, 0) \quad , \quad (\frac{5\pi}{3}, 0)$$

/ يتبع في صفحة 16 /

تكملة إجابة السؤال 7.

ب.

$$\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin x$$

$$\Downarrow$$

حسب معادلة فرق الجيوب:
$$\sin(x-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{3}+\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{4\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{7\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

إحداثيّات نقاط التقاطع بين الدالّتين:
$$(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

جـ. (1)
$$AB=d(x)=\left|f(x)-g(x)\right|$$

بالنسبة لِـ $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{4\pi}{3}$:
$$AB=d(x)=\sin x-\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$$

$$d'(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

$$d'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}+\pi k \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}$$

فحص النهاية العظمى:
$$d''(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{3}) \quad \Rightarrow \quad d''(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})<0$$

بالنسبة لِـ $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}$ أو بالنسبة لِـ $0\le x\le\frac{\pi}{3}$:
$$AB=d(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)-\sin x=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$$

$$d'(x)=-\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

$$d'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{11\pi}{6}$$

فحص النهاية العظمى:
$$d''(x)=-\sin(\frac{\pi}{3}-x) \quad \Rightarrow \quad d''(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6})<0$$

أكبر طول ممكن للقطعة AB:
$$\left|d(\frac{5\pi}{6})\right|=\left|d(\frac{11\pi}{6})\right|=1$$

(في الطرف الذي فيه $x=0$ ينتج أنّ $AB=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ ، وفي الأطراف الأخرى ينتج أنّ $AB=0$.)

(2) حسب البند الفرعيّ "جـ (1)"، توجد قطعتان كهذه، بالنسبة لِـ $x=\frac{5\pi}{6}$ وبالنسبة لِـ $x=\frac{11\pi}{6}$.

/ يتبع في صفحة 17 /

السؤال 8

معطاة الدالّتان: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$g(x) = -x^2 + c$

b وَ c هما بارامتران أكبر من 0 .

يوجد للرسمين البيانيّين للدالّتين مماسّ مشترك في نقطة مشتركة P .

أ. عبّر بدلالة b (إذا دعت الحاجة) عن إحداثيّات النقطة P .

ب. ارسم في هيئة محاور واحدة رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ورسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ ، إذا عُلم أنّ $b > 4$.

المستقيم $x = a$ يقطع المماسّ المشترك في النقطة D ، ويقطع الرسم البيانيّ لـ $f(x)$ في النقطة A ويقطع الرسم البيانيّ لـ $g(x)$ في النقطة B (D وَ A وَ B هي ثلاث نقاط مختلفة)

جـ. بيّن أنّ المستقيم PD هو مستقيم متوسّط في المثلّث PAB .

د. المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لـ $f(x)$ والمماسّ المشترك والمستقيمين $x = a$ وَ $x = -a$ ، هي S .

عبّر بدلالة S عن المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لـ $f(x)$ والرسم البيانيّ لـ $g(x)$ والمستقيمين $x = a$ وَ $x = -a$.

إجابة السؤال 8

أ. للدالّتين مماسّ مشترك في النقطة P ، لذلك: $f'(x) = g'(x)$

$$\Downarrow$$

$$2x + 4 = -2x$$

$$\Downarrow$$

الإحداثيّ x للنقطة P: $x = -1$

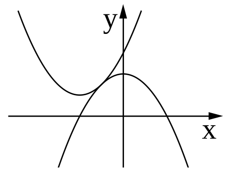
الإحداثيّ y للنقطة P: $f(-1) = b - 3$

نقطة التماسّ: $P(-1, b-3)$

/ يتبع في صفحة 18 /

تكملة إجابة السؤال 8.

ب.



(لِـ $f(x)$ نقطة نهاية صغرى في $(-2\,,\, b-4)$ ، أي أنّ الإحداثيّ y لنقطة النهاية الصغرى موجب.
لِـ $g(x)$ نقطة نهاية عظمى في $x=0$. الإحداثيّ x لنقطة التماسّ هو -1 .)

جـ. ميل المماسّ في النقطة $P(-1\,,\, b-3)$: $f'(-1)=g'(-1)=2$

لذلك معادلة المماسّ في النقطة P: $y=2x+b-1$

$\Downarrow$

الإحداثيّ y للنقطة D : $y_D=2a+b-1$

الإحداثيّ y للنقطة A : $y_A=f(a)=a^2+4a+b$

$f(-1)=g(-1)$

$\Downarrow$

قيمة البارامتر c : $c=b-2$

$\Downarrow$

الإحداثيّ y للنقطة B : $y_B=g(a)=-a^2+b-2$

$AD=y_A-y_D=a^2+2a+1$

$DB=y_D-y_B=a^2+2a+1$

$\Downarrow$

$AD=BD$

لذلك PD هو مستقيم متوسّط في المثلّث PAB .

د. I. $$S=\int_{-a}^{a}[f(x)-(2x+b-1)]\,dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$$

المساحة المطلوبة: II. $$S_{\text{مطلوبة}}=\int_{-a}^{a}[f(x)-g(x)]\,dx=2\cdot\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$$

من I وَ II ينتج: $$S_{\text{مطلوبة}}=2\cdot S$$

/يتبع في صفحة 19/

السؤال 9

معطى أنّ الدالّة الزوجيّة $f(x)=\sqrt{8-ax+bx^2}+c$ معرَّفة في المجال $-2 \le x \le 2$ فقط.

a وَ b وَ c هي بارامترات، $c > 0$.

أ. جد قيمة البارامتر a وقيمة البارامتر b .

عوِّض قيمة a وقيمة b ، وأجب عن البندين "ب" – "جـ" .

ب. نمرّر مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة f(x) في النقطة التي فيها $x=\sqrt{2}$ ،
ونمرّر مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة في النقطة التي فيها $x=-\sqrt{2}$.
المساحة المحصورة بين المماسّين والمحور x هي $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.
جد قيمة البارامتر c .

جـ. في المجال $-2 \le x \le 2$ معطاة الدالّة g(x) التي تحقّق: $g(x) = -f(x)$.
نمرّر مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة g(x) في النقطة التي فيها $x=\sqrt{2}$ ،
ونمرّر مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة في النقطة التي فيها $x=-\sqrt{2}$.
ما هو نوع الشكل الرباعيّ الذي تكوّن بواسطة المستقيمين اللذين يمسّان الرسم البيانيّ للدالّة f(x) والمستقيمين اللذين يمسّان الرسم البيانيّ للدالّة g(x) ؟ علّل.

إجابة السؤال 9

أ.

من مجال التعريف ينبع أنّ: $8-ax+bx^2 \ge 0$ فقط بالنسبة لِـ $-2 \le x \le 2$

لذلك: I. $8-a\cdot 2+b\cdot 2^2=0$

II. $8+a\cdot 2+b\cdot 2^2=0$

من I وَ II ينتج: $a=0$ ، $b=-2$

/يتبع في صفحة 20/

تكملة إجابة السؤال 9.

ب.

$$f(x) = \sqrt{8 - 2x^2} + c$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{8 - 2x^2}}$$

$$\Downarrow$$

ميل المماسّين: $f'(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ، $f'(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

الإحداثيّان y لنقطتَي التماسّ: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 2 + c$

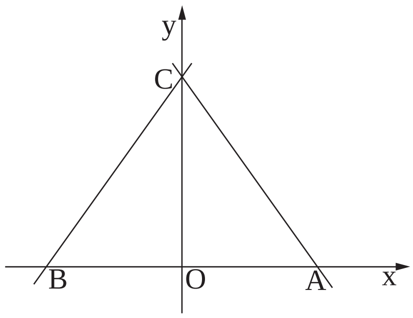
معادلة المماسّ في النقطة $A(\sqrt{2}\,,\,2 + c)$: $y = -\sqrt{2}\,x + 4 + c$

تقاطع المماسّ في النقطة A مع المحور x: $x = \frac{4 + c}{\sqrt{2}}$

معادلة المماسّ في النقطة $B(-\sqrt{2}\,,\,2 + c)$: $y = \sqrt{2}\,x + 4 + c$

تقاطع المماسّ في النقطة B مع المحور x : $x = -\frac{4 + c}{\sqrt{2}}$

إحداثيّات نقطة الالتقاء C
(انظر الرسم) للمماسّين: $(0\,,\,4 + c)$



مساحة المثلّث ABC بالنسبة لِـ $c > 0$
(انظر الرسم) هي:

$$S = \frac{1}{2} y_C \cdot AB$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (4 + c) \cdot \left(\frac{4 + c}{\sqrt{2}} + \frac{4 + c}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(4 + c)^2}{\sqrt{2}} = \frac{49\sqrt{2}}{2} \quad , \; c > 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = 3$$

/يتبع في صفحة 21/

تكملة إجابة السؤال 9.

جـ.

$$g(x) = -f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x) = -f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$g'(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

لذلك المماسّ لِـ g(x) في النقطة $x = \sqrt{2}$ يوازي المماسّ لِـ f(x) في النقطة $x = -\sqrt{2}$ ،
والمماس لِـ g(x) في النقطة $x = -\sqrt{2}$ يوازي المماسّ لِـ f(x) في النقطة $x = \sqrt{2}$ ،
لذلك المماسّان يكوِّنان متوازي أضلاع.
بسبب التماثل يلتقي المماسّان في النقطتين A وَ B (انظر الرسم).
حسب إحداثيّات A وَ B وَ C التي وجدناها في البند "ب"، طولا الضلعين المتجاورين متساويان، $CB = CA$ ، ومتوازي الأضلاع هو معيَّن.